INICIACIÓN AL ÁLGEBRA ELEMENTAL

Flor M. Rodríguez Vásquez
Catalina Navarro Sandoval
Elika S. Maldonado Mejía
Jesús Romero Valencia
Maribel Vicario Mejía
Luis A. Campistrous Pérez
Celia R. Rizo Cabrera

DIAZ DE SANTOS

Primera edición: 2016

Ediciones D. D. S. México
Cuicuilco 29C, col. Letrán Valle, C. P. 03650
Delegación Benito Juárez, México, D. F.
jnicasio@diazdesantosmexico.com
http://www.diazdesantosmexico.com.mx/

Ediciones Díaz de Santos
C/ Albasanz 2, 28037, Madrid, España
jmdiaz@editdiazdesantos.com
http:/www.editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9969-758-1

Corrección ortográfica y de estilo: Adriana Guerrero Tinoco.

Impreso en México/*Printed in Mexico*

Contenido

Prólogo

El presente libro está especialmente dedicado a aquellos estudiantes de bachillerato que quieren iniciar sus estudios en álgebra elemental, así como a aquellos estudiantes de bachillerato que deben fortalecer sus conocimientos en dicha área de la matemática.

Hemos considerado diferentes estilos de enseñanza que deben ser suscitados en el proceso educativo y, asimismo, acudimos a investigaciones en didáctica sobre álgebra elemental.

La obra se ha organizado en dos bloques, de tal forma que pueda orientar y reforzar sobre:

- Bloque 1. Estructuras numéricas: naturales, enteros, racionales, reales.
- Bloque 2. Estructuras algebraicas básicas: productos notables, factorización y operaciones con polinomios.

Cada bloque está estructurado por temas y subtemas, y al final se presenta una sección dedicada a las técnicas para resolver problemas con la finalidad de que ayuden a obtener éxito en las actividades sugeridas. El principal objetivo es proveer al lector de una estructura organizada para estimular el gusto por la iniciación en el estudio del álgebra elemental, así como coadyuvar en la comprensión de los temas.

Por último, queremos externar nuestro agradecimiento total por el trabajo y esfuerzo al Cuerpo Académico Educación Matemática UAGRO-CA-154, así como a los colaboradores: Yanet Tejada, Gustavo Antero, Miguel Cervantes, Javier García, Martha Rivera, Florida Pastrana y Yadira Villareal, quienes con sus conocimientos, propuestas y dedicación enriquecieron el texto.

Esta obra fue auspiciada por el proyecto **Fortalecimiento del Cuerpo Académico "Educación Matemática"** aprobado por el Programa de Mejoramiento del Profesorado. Subsecretaría de Educación Superior. Secretaría de Educación Pública.

Bloque 1

TEMA 1. LOS NÚMEROS PARA CONTAR Y SUS OPUESTOS

(ΤΕΜΑ 1. ΛΟΣ Ν∨ΜΕΡΟΣ ΠΑΡΑ ΧΟΝΤΑΡ Ψ ΣΥΣ ΟΠΥΕΣΤΟΣ)

Sabías que…

Numeración en tablilla cuneiforme babilónica

Los números naturales son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones, debido a que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales que se pueden realizar en el tratamiento de las cantidades. La necesidad de efectuar conteos, desde la antigüedad, tuvo como consecuencia que el hombre inventara sistemas de numeración para representarlos. Los primeros números fueron 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y mucho más tarde apareció el cero. Los *números naturales* fueron creados para contar objetos presentes en la naturaleza, de ahí su nombre. Así, cuando decimos "tengo seis hermanos", "un mes tiene 30 o 31 días", "tengo 40 años", "el estado de Guerrero tiene 81 municipios", estamos utilizando números naturales para determinar cuántos objetos hay.

Los números naturales, además de ayudarnos a contar, nos sirven para ordenar. Por ejemplo: decimos que mayo es el *quinto* mes del año, que eres el *tercer* hijo en tu familia, entre otros casos.

Por otro lado, en cuanto a los números enteros, de acuerdo con datos históricos, durante los siglos I y II a. C. en China ya se utilizaban los números negativos (como coeficientes de ecuaciones) y se usaban las reglas operativas de los signos; en Europa estos números no llegaron a ser conocidos sino hasta la alta Edad Media, a través de los textos árabes.

En un principio, a los números negativos no se les reconocía como números verdaderos, por lo que se les denominaba como falsos, ficticios, absurdos, imposibles. Todavía durante los siglos XVII y XVIII tanto su concepto como fundamentación lógica no estaban claros, así que algunos matemáticos siguieron inventando justificaciones, mientras que otros seguían protestando por su uso hasta principios del XIX. Su construcción formal a partir de los números naturales, fue realizada por Weierstrass a mediados del siglo XIX.

A pesar de las dificultades que representó el reconocimiento de los números negativos a través de la historia, hoy día nadie duda de su existencia como modelo matemático, y menos aún de su necesidad para interpretar y representar diversas situaciones cotidianas (sobre todo para representar deudas, temperaturas por debajo de cero, entre otras).

Situación problema	Pídele a un compañero que lance 3 dados y no te diga el resultado. Ahora para "adivinar" los números pídele que realice lo siguiente: *1)* multiplicar por 2 el número de puntos del primer dado; *2)* sumar 5 al resultado anterior; *3)* multiplicar por 5 la suma anterior; *4)* sumar 10 al producto anterior; *5)* sumar los puntos del segundo dado al último resultado; *6)* multiplicar por 10 la suma anterior; *7)* sumar los puntos del tercer dado al producto anterior; *8)* restar 350. El resultado que se obtiene es un número cuyas centenas son los puntos del primer dado, las decenas se corresponden con los puntos del segundo dado, y las unidades son los puntos del tercer dado. Compruébalo.

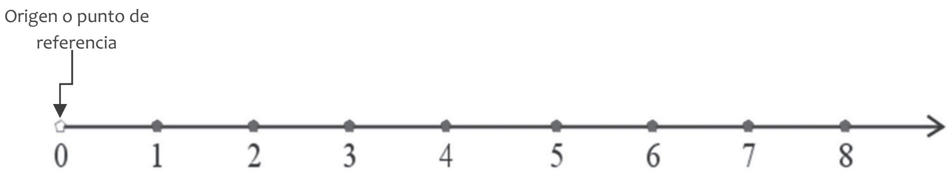
Subtema 1.1. Los números para contar. Significado ordinal y cardinal

Los números $1, 2, 3$ ... aparecen como números ordinales (primero, segundo, tercero…) y como números cardinales (número natural correspondiente al total de elementos de un conjunto). Una forma de construir los números naturales queda definida por los siguientes *Axiomas de Peano*:

1) 0 es un número natural.
2) Cada número natural x posee un sucesor $x´$ (x' es $x+1$).
3) 0 no posee antecesor, es decir, en los naturales no hay un x tal que $x+1$ sea 0.
4) Si $x´ = y´$, entonces $x = y$.
5) Si 0 pertenece a un conjunto de números naturales y siempre que x está en el conjunto su sucesor $x´$ está en el conjunto, entonces este conjunto es el conjunto de todos los números naturales.

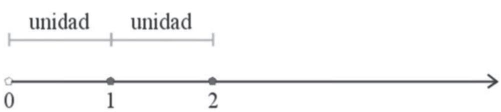
Por lo general, el conjunto de los números naturales se representa por el símbolo $\mathbb{N}$.

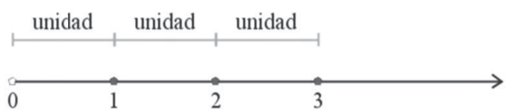
Regularmente los números naturales se ordenan y se representan sobre la semirrecta numérica como se muestra a continuación:



Para la construcción de ésta, partimos de un punto, al que le llamamos origen, y un segmento de unidad. Para iniciar la construcción colocamos un extremo en el origen y en donde llegue la otra orilla derecha del segmento lo marcamos con el número 1.

Después se transporta el segmento unidad en el 1 y a partir del uno se marca el otro extremo con el 2, repitiendo esta operación se marcan los números naturales sucesivos hasta llegar a tener la semirrecta de los números naturales.





Así, el conjunto de números naturales es infinito y podemos representarlo como:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 12, 13, 14, \dots\}$$

Subtema 1.2. Más de números naturales

En los números naturales sólo están definidas las operaciones de adición y multiplicación. Cuando se suman o se multiplican dos números naturales, el resultado es otro número natural, esto significa que la operación es *cerrada*, por ejemplo:

Suma	$20 + 45 = 65$
Multiplicación	$618 \times 25 = 15450$

1.2.1. Propiedades de la adición de números naturales

La adición de números naturales cumple las siguientes propiedades:

Propiedad asociativa: si a, b, c son números naturales cualesquiera, se cumple que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Por ejemplo:

$(5 + 4) + 8 = 5 + (4 + 8)$.

Comprobación:

$(5 + 4) + 8 = 9 + 8 = 17$.

$5 + (4 + 8) = 5 + 12 = 17$.

Propiedad conmutativa: si a, b son números naturales cualesquiera, se cumple que $a + b = b + a$.

Por ejemplo:

$3 + 5 = 5 + 3$.

Comprobación:

$3 + 5 = 8$, y además $5 + 3 = 8$, por lo que se verifica la propiedad conmutativa.

Elemento neutro: el 0 es el elemento neutro de la suma de enteros porque, cualquiera que sea el número natural a, se cumple que $a + 0 = a$.

Por ejemplo:

$5 + 0 = 5$.

1.2.2. Propiedades de la multiplicación de números naturales

La multiplicación de números naturales cumple las propiedades asociativa, conmutativa, elemento neutro y distributiva del producto respecto de la suma.

Propiedad asociativa: si a, b, c son números naturales cualesquiera, se cumple que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Por ejemplo:

$(3 \cdot 5) \cdot 2 = 3 \cdot (5 \cdot 2)$.

Comprobación:

$(3 \cdot 5) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$.

$3 \cdot (5 \cdot 2) = 3 \cdot 10 = 30$.

Los resultados coinciden, de modo que la propiedad se comprueba.

Propiedad conmutativa: si a, b son números naturales cualesquiera, se cumple que $a \cdot b = b \cdot a$.

Por ejemplo:

$5 \cdot 8 = 8 \cdot 5 = 40$.

Elemento neutro: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque, cualquiera que sea el número natural a, se cumple que $a \cdot 1 = a$.

Por ejemplo:

$5 \cdot 1 = 5,\ 10 \cdot 1 = 10$.

Distributiva del producto respecto de la suma: si a, b, c son números naturales cualesquiera, se cumple que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Por ejemplo:

$7 \cdot (3 + 2) = 7 \cdot 3 + 7 \cdot 2$.

Para comprobar la igualdad, resolveremos cada miembro de la ecuación:

$7 \cdot (3 + 2) = 7 \cdot 5 = 35$.

$7 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 21 + 14 = 35$.

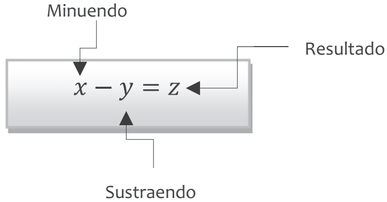
Como los resultados coinciden, la propiedad se cumple.

1.2.3. Sobre la sustracción de números naturales

Al igual que la suma, la resta es una operación que se deriva de la operación de contar. Por ejemplo, si tenemos 10 gallinas y los coyotes se comen 4, ¿cuántas gallinas nos quedan?

Esto corresponde a realizar una operación llamada *sustracción* o *resta*, y se puede expresar como: $10 - 4 = 6$.

Es importante saber que los términos de la resta se llaman *minuendo* (las gallinas que tenemos) y *sustraendo* (las gallinas que se comieron los coyotes).



La resta no cumple con la propiedad conmutativa, es decir, $a - b \neq b - a$.

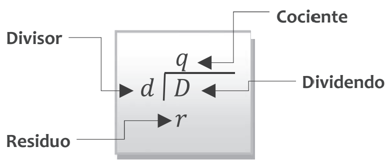
Por ejemplo:

$8 - 4 = 4$, pero $4 - 8 = -4$. Y obviamente, 4 es diferente de -4.

1.2.4. Sobre la división de números naturales

La división es la operación que permite repartir un determinado número de objetos (dividendo) entre otro determinado número de objetos o sujetos (divisor *que tiene que ser distinto de cero*). En otras palabras, la división consiste de calcular cuántas veces el dividendo contiene al divisor.

Los términos de la división se llaman *dividendo* (el número de objetos), *divisor* (el número de sujetos), *cociente* (el número que le corresponde a lo que se repartió) y *resto o residuo* (lo que sobra).



La división también se puede representar como: $\frac{D}{d}$, $D{:}\,d$, ${}^{D}/_{d}$.

Si el resto es cero, la división se llama exacta, y en caso contrario, es inexacta.

División exacta

$a)\ \frac{10}{5}$

$b)\ \frac{9}{3}$

$c)\ \frac{100}{50}$

$d)\ \frac{1500}{100}$

División inexacta

$a)\ \frac{10}{4}$

$b)\ \frac{25}{12}$

$c)\ \frac{125}{10}$

$d)\ \frac{1050}{13}$

La división no cumple con la propiedad conmutativa. No es lo mismo $\frac{a}{b}$ que $\frac{b}{a}$, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ es diferente que $\frac{4}{3}$.

Ejercicios resueltos

1. Usando las propiedades distributiva, asociativa, elemento neutro y conmutativa, resuelve lo siguiente según corresponda:

Ejercicio	Solución
a) $9(4+8)=$	$9(4+8)=9(4)+9(8)$ $=36+72$ $=108$
b) $(127+86)+144=$	$127+(86+144)=127+230$ $=357$
c) $10(5+0)=$	$10(5+0)=10(5)$ $=50$
d) $(10)(6)(1)=$	$(10)(6)(1)=10(6\times 1)$ $=10(6)$ $=60$

2. El fin de semana la mamá de Juanito compró 5 kg de naranjas por \$20, 2 kg de fresa por \$36 y 3 kg de manzana por \$75. ¿Cuál fue el costo de cada tipo de fruta por kilo? ¿Cuánto gastó en las frutas?

Solución:

Si por 5 kg de naranjas pagó \$20, entonces basta con dividir \$20 por 5 kg, por lo que el kilogramo de naranja costó \$4.

Ahora, si por 2 kg de fresa se pagó \$36, entonces el kg costó \$18.

Y si por 3 kg de manzanas se pagó \$75, por lo que el kilo costó \$25.

En total se gastó:

	C	D	U
\$		2	0
\$		3	6
\$		7	5
\$	1	3	1

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Usando las propiedades distributiva, asociativa y conmutativa y la propiedad del neutro resuelve las siguientes operaciones:

a) $6+(8\times 1)=$ b) $20+0+3+27=$

c) $3(4\times 0)+4(15\times 1)=$ d) $(25+18)7=$

e) $8(57\times 0)\times 5(7+9)=$ f) $2(2+1)+1\times(3+2)+3\times(4\times 5)=$

g) $(5\times 9\times 8)3=$ h) $(46+5)\times(10+30)=$

i) $(15\times 3)+(29\times 4)=$ j) $5\times(49+0)\times 9\times(9+1)=$

k) $(6+9)\times(7+2)+(3\times 2)=$ l) $49\times(391+155)=$

2. Mi amigo José nos invitó a una reunión para celebrar su cumpleaños. Compró 5 pizzas de \$130 c/u, 12 refrescos de \$15 c/u, 3 paquetes de vasos de \$8 c/u, 4 paquetes de platos de \$12 c/u y \$159 en diversos artículos. José cuenta con \$1,358.

¿Cuánto dinero lleva gastado José?

¿Le alcanzará para comprar el pastel (que cuesta \$375) con el resto del dinero?

¿Qué operaciones tiene que realizar para hacer el cálculo total?

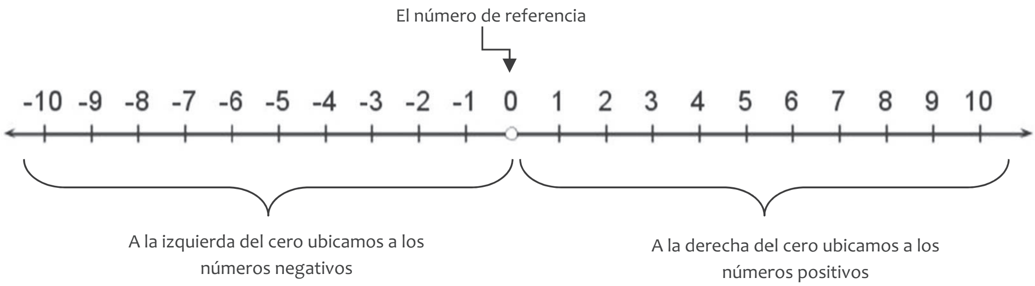
3. Un número natural de tres cifras es 11 veces la suma de sus cifras. ¿Cuál es el número?

Subtema 1.3. Opuestos de los números naturales. Los números enteros

En el primer subtema de este bloque trabajamos los números naturales, los cuales se pueden representar sobre la recta de la manera siguiente:

Ahora bien, en este subtema interesa presentar los opuestos de los números naturales. A partir de los números naturales que ya conocemos, a lo cuales también se les llama números enteros positivos y se distinguen por ser mayores que el cero, se construyen los números enteros negativos, que son los opuestos de los números naturales y además son menores que cero. Para expresar el sentido de un número se utilizan los signos + y −, los cuales se colocan a la izquierda del número natural.

Entonces, para ubicarlos en la recta numérica partimos de un punto de referencia, y ubicamos los números negativos y positivos como se muestra en la siguiente figura:



Por tanto, a los números enteros positivos los podemos denotar por $\mathbb{Z}^+$ y a los números enteros negativos como $\mathbb{Z}^-$, de modo que **la unión de $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ y 0 representa el conjunto de los números enteros** y es representado por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

Los números enteros, al igual que los números naturales, están ordenados, por lo que cumplen lo siguiente:

1) Todo número positivo es mayor que 0.
2) El 0 es mayor que cualquier número negativo.
3) Si un número es positivo, es mayor cuanto mayor sea su símbolo numérico.
4) Si un número entero es negativo, es mayor cuanto menor sea su símbolo numérico.

Así como podemos representar y ubicar a los números naturales en la recta, también podemos ubicar a los números enteros positivos y negativos, observando su orden y posición.

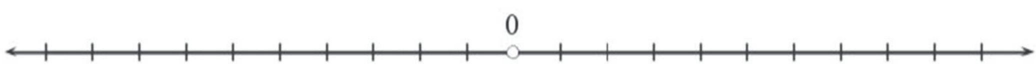
Por último, para poder expresar que un número es mayor que otro, se utiliza el símbolo $>$.

Así: $(-1) > (-8);\ 20 > 5;\ 4 > 0;\ 0 > (-20);\ 2 > (-15)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

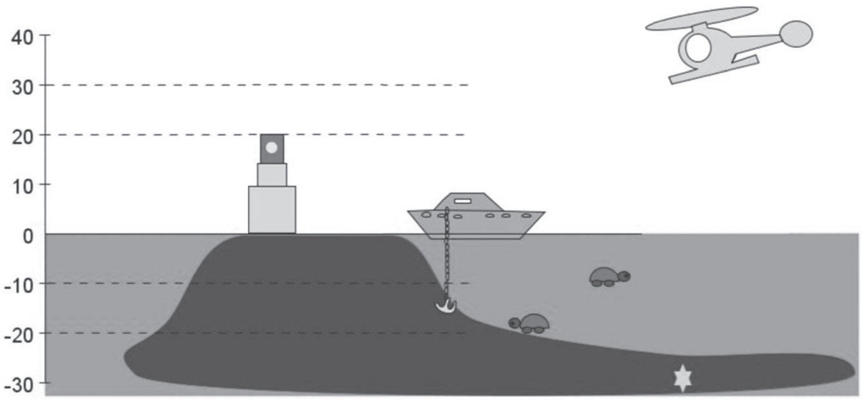
1. Localiza en la recta los siguientes números:

$$\text{a)} -5,\quad \text{b)} -3,\quad \text{c)} -6,\quad \text{d)} -4,\quad \text{e)}\ 5,\quad \text{f)} -2,\quad \text{g)} -7,\quad \text{h)}\ 3$$



¿Qué es mayor: -3 o -2? _____ ¿Qué es mayor: -3 o 3? _____

2. Observa el dibujo y completa las oraciones con las distancias a que se encuentran los objetos representados, del nivel del mar.



La base del helicóptero está a <u>30</u> m **<u>sobre</u>** el nivel del mar.

El faro está a _______ m _______ el nivel del mar.

El ancla del barco está a _________ m _____ el nivel del mar.

La estrella está a _________ m, o bien, a _______ m bajo el nivel del mar.

La tortuga que va hacia la derecha se encuentra a _______m de profundidad del mar.

La tortuga que va en dirección al faro se encuentra a _________ metros.

3. En la lista de los 40 principales, el disco favorito de Janet estaba tres lugares más abajo de lo que había estado la semana anterior. La antigua posición era la 25. ¿Cuál es la nueva posición?

4. En la tabla de la liga de futbol mexicano, el equipo de las Chivas subió cuatro posiciones esta semana. Anteriormente estaba en la posición 14. ¿En qué posición se encuentra ahora?

5. En la lista de los 40 principales, el disco favorito de Susana pasó del lugar 12 al lugar 15. ¿Subió o bajó? ¿Cuántos puestos?

6. Un día, en la región Montaña del estado de Guerrero, la temperatura ascendió 6°C entre la salida del sol y el mediodía. A la salida del sol se registraban -7°C. ¿Cuál era la temperatura al mediodía?

7. En el estado de Guerrero, la temperatura es de -7° en la montaña alta y de -3° en la sierra de Atoyac. Si alguien hubiese viajado de la montaña a la sierra de Atoyac, ¿habría notado un ascenso o descenso de temperatura?

8. La computadora de Pedro costó $1 200 más que la de Mariana. Si Pedro pagó $13 455 por su computadora, ¿cuánto costó la de Mariana?

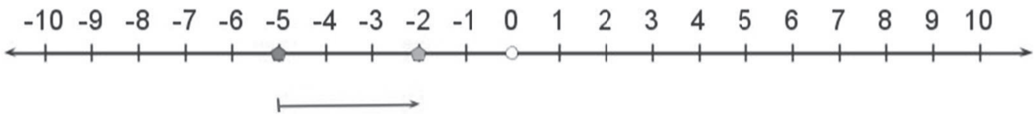
Subtema 1.4. Operaciones con números enteros. Signos de agrupación

1.4.1. Adición de números enteros

La suma en los números enteros tiene varios significados, entre ellos: añadir, agregar, avanzar, al igual que en los números naturales.

Veamos el siguiente ejemplo usando la representación en la recta numérica:

Sea $a = -5$ y $b = 3$. Calcula $a + b$.



A partir de -5 se avanza 3 unidades hacia la derecha, puesto que 3 tiene signo positivo. El resultado es el número -2, lo que algebraicamente corresponde a:

$$a + b = (-5) + (+3) = (-2)$$

Casos de la suma de números enteros.

1. Si los dos números que se suman son positivos, el resultado es otro número positivo.

   Por ejemplo:

   $(+6) + (+5) = (+9)$.

> Cuando sumas números con signos iguales, ya sean positivos o negativos, el resultado conserva el signo.
>
> Cuando sumas números con signos diferentes, el resultado conserva el signo del número mayor en valor absoluto. En este caso, las cantidades se restan.

2. Análogamente, cuando los dos números que se suman son negativos, el resultado es otro número negativo.

   Por ejemplo:

   $(-4) + (-6) = (-10)$.

3. En el caso en que los sumandos tengan distinto signo, el resultado puede ser positivo o negativo.

   Por ejemplo:

   $(+2) + (-8) = (-6)$ y $(+9) + (-1) = (+8)$.

> VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO.
> Se llama *valor absoluto* de un número entero al número natural que resulta de eliminar el signo del número entero.
> Y se representa escribiendo el número entero entre dos barras verticales $|\square|$
>
> El valor absoluto de -3 es el número natural 3: $|(-3)| = 3$.

1.4.2. Sustracción de números enteros

Para este subtema iniciemos con el siguiente ejemplo:

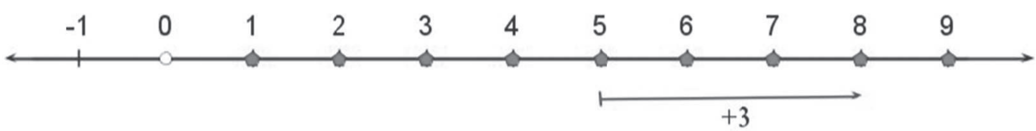
Los registros de temperatura tomados en una estación meteorológica en un cierto periodo de tiempo son:

Registro	1	2	3	4	5	6
Temperatura	$(+5)°C$	$(+8)°C$	$(+3)°C$	$(-1)°C$	$(-4)°C$	$(+2)°C$

¿Cuáles son los cambios sucesivos que se han ido experimentando?

Cambio 1: registro $1 - 2$.

El termómetro ha pasado de marcar $(+5)°C$ a marcar $(+8)°$ Celsius.

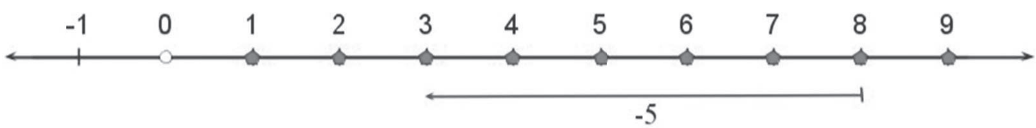


El cambio, por tanto, es de $3°$, y como además ha aumentado, entonces es positiva, luego la diferencia es de $(+3)$. Esto se expresa numéricamente mediante una resta:

$$(+8) - (+5) = (+3)$$

Cambio 2: registro $2 - 3$.

El termómetro ha pasado de $(+8)°C$ a marcar $(+3)°$ Celsius.

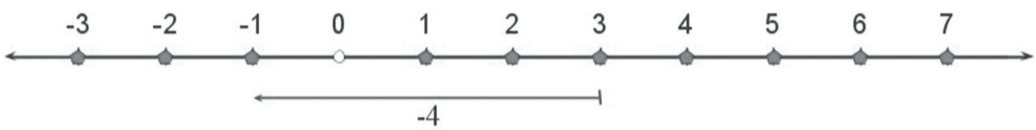


La diferencia es de 5 grados, pero en sentido negativo, luego la variación es de (-5).

Esto se expresa así: $(+3) - (+8) = (-5)$.

Cambio 3: registro $3 - 4$.

El termómetro ha pasado de $(+3)$°C a (-1)° Celsius.

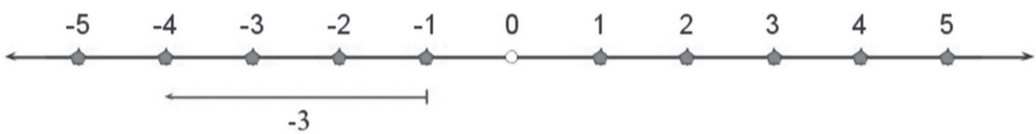


La diferencia es de 4 grados en sentido negativo, es decir, (-4).

Numéricamente se expresa así: $(-1) - (+3) = (-4)$.

Cambio 4: registro $4 - 5$.

El termómetro ha pasado de (-1)°C a (-4)° Celsius.

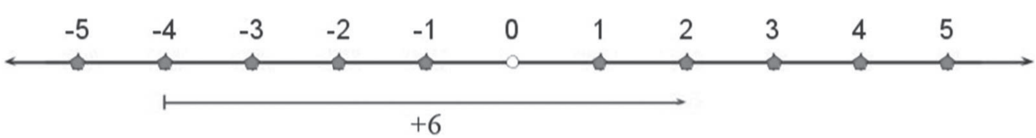


La diferencia es de 3 grados en sentido negativo: (-3).

Numéricamente se expresa así: $(-4) - (-1) = (-3)$.

Cambio 5: registro $5 - 6$.

El termómetro varía de (-4)°C a $(+2)$° Celsius.

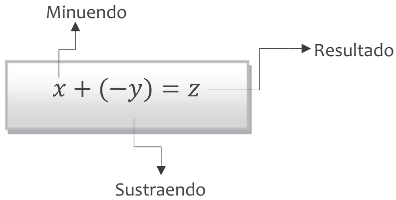


Es una variación positiva de 6 grados, es decir: $(+6)$°.

Se expresa así: $(+2) - (-4) = (+6)$.

Al igual que en los números naturales, algunos significados de restar en los números enteros son quitar, eliminar, retroceder, entre otros.

Para restar números enteros se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.



1.4.3. Operaciones combinadas de sumas y restas. Signos de agrupación

Las operaciones combinadas de sumas y restas pueden tener tantos números como sea posible. Por tal razón, es conveniente agrupar algunas cantidades para indicar que éstas son consideradas como una sola. Los símbolos usados para este propósito son: el paréntesis circular u ordinario (   ), el paréntesis rectangular o corchete [   ] y las llaves {   }.

Reglas para suprimir los símbolos de agrupación	Ejemplo
1. Cuando una expresión compuesta de varias cantidades está encerrada por un símbolo de agrupación precedido por el signo $(+)$, el símbolo se suprime sin cambiar los signos de las cantidades de la expresión.	$\mathbf{5} + \left[\mathbf{2} + \left((-\mathbf{3}) + \mathbf{2}\right)\right] = 5 + [2 + (-3) + 2]$ $= 5 + 2 + (-3) + 2$ $= (5 + 2 + 2) - 3$ $= 9 - 3 = 6$
2. Cuando una expresión compuesta de varias cantidades está encerrada por un símbolo de agrupación precedido por el signo $(-)$, el símbolo se suprime cambiando el signo de cada una de las cantidades de la expresión.	$\mathbf{5} - \left[\mathbf{2} - \left((-\mathbf{3}) + \mathbf{2}\right)\right] = 5 - [2 + 3 + (-2)]$ $= 5 + (-2) + (-3) + 2$ $= (5 + 2) - (2 + 3)$ $= 7 - 5$ $= 2$

3. Una cantidad que esté multiplicando a una expresión encerrada en un símbolo de agrupación multiplica a cada una de las cantidades que están dentro del símbolo.	$\mathbf{5+5\big[2+2\big((-3)+2\big)\big]=}$ $=5+5[2+((2\cdot(-3))+(2\cdot 2))]$ $=5+5[2+(-6)+4]$ $=5+(5\cdot 2)+\big(5\cdot(-6)\big)+(5\cdot 4)$ $=5+10-30+20$ $=(5+10+20)-30$ $=5$
4. Cuando los símbolos de agrupación están contenidos unos dentro de otros, es conveniente suprimirlos empezando por el o los símbolos que están más adentro, sin que esto quiera decir que los símbolos no puedan ser suprimidos en forma distinta.	$\mathbf{3-\{(-4)+5+[6-(7-8-9)+10]-11\}+15-1=}$ $=3-\{(-4)+5+[6-7+8+9+10]-11\}+15-1$ $=3-\{(-4)+5+6-7+8+9+10-11\}+15-1$ $=3+4-5-6+7-8-9-10+11+15-1$ $=(3+4+7+11+15)-(5+6+8+9+10+1)$ $=40-39$ $=1$
5. En cualquier caso, se agrupan los términos positivos y negativos, y se suman.	

1.4.4. Multiplicación de números enteros

Para multiplicar dos números enteros se multiplican sus valores absolutos; si los números tienen el mismo signo, el producto será positivo; si tienen signos diferentes, el producto será negativo.

$(+)(+)=+$

$(+)(-)=-$

$(-)(+)=-$

$(-)(-)=+$

Ejemplos:

$$(+3)(+2)=(+6)$$
$$(+3)(-2)=(-6)$$
$$(-3)(+2)=(-6)$$
$$(-3)(-2)=(+6)$$

Regla de los signos para multiplicación

- El producto de dos números enteros positivos es otro número entero positivo.
- El producto de un número entero positivo por otro negativo es un número entero negativo.
- El producto de dos números enteros negativos es un número entero positivo.

1.4.5. División de números enteros

La división puede considerarse como la operación inversa de la multiplicación, es decir, si dados a, b en $\mathbb{Z}$ tales que $a \cdot b = c$ y $b \neq 0$ entonces $a = \frac{c}{b}$, sin embargo, esto no siempre se puede realizar en los enteros, por ejemplo $\frac{7}{3}$ no podría realizarse en los enteros ya que no hay un entero que al multiplicarlo por 3 nos de como resultado 7. Pero esta operación se realiza como sigue: al dividir 7 por 3 obtenemos como resultado 2 y como residuo 1, en símbolos $7 = 2 \cdot 3 + 1$. En general, dividir un número entero llamado dividendo entre otro número entero llamado divisor es encontrar un tercer número entero, llamado cociente, de tal forma que el cociente por el divisor más el resto sea igual al dividendo.

Simbólicamente: $D = q \cdot d + r$, donde $0 < r < d$.

$$\begin{array}{r|l} & q \\ d & \overline{D} \\ & r \end{array}$$

$$\frac{(+)}{(+)} = + \qquad \frac{(+)}{(-)} = - \qquad \frac{(-)}{(+)} = - \qquad \frac{(-)}{(-)} = +$$

Ejemplos:

$$\frac{(+8)}{(+2)} = +4 \qquad \frac{(+8)}{(-2)} = -4 \qquad \frac{(-8)}{(+2)} = -4 \qquad \frac{(-8)}{(-2)} = +4$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 5\overline{)89} \\ 39 \\ 4 \end{array} \quad \text{así } 89 = 17 \cdot 5 + 4$$

Regla de los signos para división

- Si D es positivo, por la regla de la multiplicación, el divisor y el cociente han de tener el mismo signo. Por tanto:
  - Si d es positivo, q es positivo.
  - Si d es negativo, q es negativo.
- Si D es negativo, por la regla de multiplicación, los factores d y q tienen que tener distinto signo. Por tanto:

- Si d es positivo, q es negativo.
- Si d es negativo, q es positivo.

Si el dividendo y el divisor de una división de números enteros tienen el mismo signo, el cociente es positivo, y si el dividendo y el divisor tienen distinto signo, el cociente es negativo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sean $a = 4,\ \ b = 2,\ \ c = -2\ \ y\ \ d = -1$. Apoyándote en la recta numérica, calcula:

a) $a + b$

b) $c + d$

c) $b + d$

d) $a + d$

2. Resuelve lo siguiente:

a) $35 + 29 =$

b) $(-32) + (-88) =$

c) $(-39) + 13 =$

d) $(-21) + 68 =$

e) $99 + (-24) =$

f) $18 + (-45) =$

3. Calcula el valor de cada expresión utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación.

a) $(+5) \times \big((-3) + (-7\ ) + (+4)\big)$
b) $(+3) \times (-2) + (-1) \times (-2\ ) + (-5) \times (-2)$

4. Suprime los símbolos de agrupación y reduce términos semejantes en las expresiones algebraicas siguientes:

a) $2 + \{-5 - [-2 + (-1 + 2)]\} =$

b) $7 - \{15 + [-8 + (-4 + 6 - 12)\ ]\} =$

c) $-[-27 + (-8 - 16 - 24)] + \{-(4 + 7) + (-6 - 18 + 10 - 5 + 9)\} =$

d) $10 + \{-3[25 + (12 - 4) + 8 - (-3 + 6 - 4 + 8)] - (-2 + 5)\} =$

5. Resuelve lo siguiente

a) $35 \div 29 =$

b) $(-88) \div (-32) =$

c) $(-39) \div 13 =$

d) $68 \div (-21) =$

e) $(-99) + 24 =$

f) $45 + (-18) =$

Subtema 1.5. Propiedades de las operaciones con números enteros

1.5.1. Propiedades de la suma de números enteros

Es cerrada: al sumar dos números enteros, siempre se obtiene un número entero.

Asociativa: si $a, b, c \in \mathbb{Z},\ a + (b + c) = (a + b) + c.$

Por ejemplo:

$-5 + (-4 - 3) = (-5 - 4) + (-3).$

Puedes comprobar esto resolviendo de la siguiente manera:

$-5 + (-4 - 3) = -5 + (-7) = -12.$

$(-5 - 4) + (-3) = (-9) + (-3) = -12.$

Conmutativa: Si $a, b \in \mathbb{Z}, a + b = b + a.$

Por ejemplo:

$(-3) + (-6) = (-6) + (-3).$

Para comprobar:

$(-3) + (-6) = -9.$

$(-6) + (-3) = -9.$

El cero es el elemento neutro: si $a \in \mathbb{Z}, a + 0 = 0 + a = a.$

Por ejemplo:

$(-3) + 0 = 0 + (-3) = -3.$

Inverso aditivo: todo número entero m tiene asociado a él un número entero m', de tal forma que $m + m' = 0$.

El inverso aditivo de un número entero es otro número entero, tal que sumado con él se obtiene el cero. Así, si m es un número entero cualquiera, su inverso aditivo se representa por $-m$.

Por ejemplo:

-8 es el opuesto de 8, porque $(-8) + 8 = (8) + (-8) = 0$.

10 es el opuesto de -10, porque $10 + (-10) = (-10) + 10 = 0$.

1.5.2. Propiedades de la resta números enteros

Es cerrada: la diferencia de dos números enteros es un número entero.

No es asociativa: en general, si $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a - (b - c) \neq (a - b) - c$.

Por ejemplo:

$(-2) - [(+3) - (-1)] = (-2) - (+4) = (-6)$.

$\lfloor(-2) - (+3)\rfloor - (-1) = (-5) - (-1) = (-4)$.

Por tanto: $(-2) - [(+3) - (-1)] \neq \lfloor(-2) - (+3)\rfloor - (-1)$, ya que $(-6) \neq (-4)$.

No es conmutativa: en general, si a, b $\in \mathbb{Z}$, a-b $\neq$ b-a.

$(-3) - (+2) = (-5)$

$(+2) - (-3) = (+5)$

Por tanto: $(-3) - (+2) \neq (+2) - (-3)$, ya que $(-5) \neq (5)$.

No tiene elemento neutro: en general, si $a \in \mathbb{Z}, a - 0 \neq 0 - a \neq a$.

Por ejemplo:

$(-5) - 0 \neq 0 - (-5) \neq (-5)$

$5 - 0 \neq 0 - 5 \neq 5$

Inverso aditivo: si $a \in \mathbb{Z}, a - a = 0$.

Ejemplos:

$(-5) - (-5) = (-5) + (+5) = 0$.

$(+2) - (+2) = (+2) + (-2) = 0$.

$(-3) - (-3) = (-3) + (+3) = 0$.

1.5.3. Propiedades de la multiplicación de números enteros

Ley de composición interna: al multiplicar dos números enteros, siempre se obtiene un número entero. Simbólicamente: si $a, b \in \mathbb{Z}, a \cdot b \in \mathbb{Z}$.

Asociativa: si para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Por ejemplo:

$\big((-6) \cdot (-2)\big) \cdot (-1) = (-6) \cdot ((-2) \cdot (-1))$.

Para comprobar:

$\big((-6) \cdot (-2)\big) \cdot (-1) = 12 \cdot (-1) = -12$.

$(-6) \cdot \big((-2) \cdot (-1)\big) = (-6) \cdot 2 = -12$.

Por tanto:
$\big((-6) \cdot (-2)\big) \cdot (-1) = (-6) \cdot ((-2) \cdot (-1))$ ya que $-12 = -12$.

Conmutativa: si para todo $a, b \in \mathbb{Z},\ a \cdot b = b \cdot a$.

Por ejemplo:

$(-3) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-3)$.

Para comprobar:

$(-3) \cdot (-5) = 15$.

$(-5) \cdot (-3) = 15$.

Por tanto: $(-3) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-3)$ ya que $15 = 15$.

Elemento neutro, el $(+1)$: para todo $a \in \mathbb{Z},\ \ a \cdot (+1) = (+1) \cdot a = a$.

Por ejemplo:

$(-8) \cdot (+1) = (+1) \cdot (-8) = -8$.

Distributiva de la multiplicación respecto de la suma: para todo $a, b, c \in \mathbb{Z},\ \ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Por ejemplo:

$(-2) \cdot \big((-3) + (-8)\big) = \big((-2) \cdot (-3)\big) + ((-2) \cdot (-8))$.

Para comprobar resultados:

$(-2) \cdot \big((-3) + (-8)\big) = (-2) \cdot (-11) = 22$.

$\big((-2) \cdot (-3)\big) + \big((-2) \cdot (-8)\big) = 6 + 16 = 22$.

Distributiva de la multiplicación respecto de la sustracción: para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$.

Por ejemplo:

$(-2) \cdot \big((-3) - (-8)\big) = \big((-2) \cdot (-3)\big) - ((-2) \cdot (-8))$.

Para comprobar resultados:

$(-2) \cdot \big((-3) - (-8)\big) = (-2) \cdot (-3 + 8) = (-2) \cdot 5 = -10$.

$\big((-2) \cdot (-3)\big) - \big((-2) \cdot (-8)\big) = 6 - 16 = -10$.