DISTRIBUCIÓN DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Jorge Sanchez
Miguel Corona

DIAZ DE SANTOS

Primera edición: 2013

Ediciones D. D. S. México
Elisa 161, Col. Nativitas, C. P. 03500
Delegación Benito Juárez, México, D. F.
jnicasio@diazdesantosmexico.com
http://www.diazdesantosmexico.com

Ediciones Díaz de Santos
C/ Albasanz 2, 28037, Madrid, España
jmdiaz@editdiazdesantos.com
http://www.editdiazdesantos.com/

ISBN: 978-84-9969-561-7

Corrección ortográfica y de estilo: Adriana Guerrero Tinoco.
Diseño de portada: Aarón González Cabrera.

Fecha de edición: diciembre de 2013
Impreso y hecho en México

Índice

Introducción

La primera orientación científica sobre el estudio de los números enteros, es decir, el origen de la teoría de los números, se atribuye generalmente a los griegos. Aproximadamente seis siglos antes de nuestra era, Pitágoras y sus discípulos, entre sus diversas aportaciones, efectuaron un vasto estudio acerca de los enteros. Euclides, en el tercer siglo A. C. demostró que existe una infinidad de números primos. Un número primo se define como un entero mayor que uno cuyos únicos divisores son el uno y él mismo, es decir,

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots .$$

Los números que no son primos se llaman compuestos, excepto el número 1 que no es ni primo ni compuesto.

El *Teorema Fundamental de la Aritmética* establece que todo entero $n > 1$ se escribe de manera única como producto de primos sin importar el orden de los factores. Por esta razón, el estudio de las propiedades de los números primos siempre ha sido objeto de intenso estudio por matemáticos de todas las épocas.

La distribución de los números primos es muy irregular, se sabe que podemos encontrar espacios tan grandes como se quieran donde no exista ningún número primo; por ejemplo, la sucesión

$$(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \cdots , (n+1)! + (n+1)$$

consiste de n enteros consecutivos compuestos. Por otro lado, la *conjetura de los primos gemelos* afirma la existencia de una infinidad de parejas de primos p y q cuya diferencia es 2, o sea

$$p - q \;=\; 2.$$

Sin embargo, a pesar de tales fenómenos, la distribución de los números primos obedece a ciertas leyes que estudiaremos más adelante.

Un problema clásico es saber cuántos números primos pertenecen al intervalo $[1, x]$; en la teoría de los números la función $\pi(x)$ denota a tal cantidad, es decir,

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

donde la sumatoria es tomada sobre los números primos. Bajo esta notación el teorema de Euclides establece que

$$\pi(x) \to \infty \quad \text{cuando } x \to \infty.$$

En 1737, L. Euler consideró la serie de variable real

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}, \qquad \sigma > 1.$$

Él observó que tiene lugar la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-\sigma}}, \qquad \sigma > 1,$$

donde el producto está tomado sobre todos los números primos p. Mediante esta observación, Euler estableció que la serie $\sum 1/p$ tomada sobre todos los números primos diverge, hecho que conduce a una demostración analítica de la existencia de una infinidad de números primos. Euler también demostró que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0,$$

esta afirmación nos dice que los números primos no son tan frecuentes entre los números naturales. La distribución de los números primos ha sido objeto de gran estudio apartir del siglo XVIII.

En 1798, A. M. Legendre conjeturó que para valores grandes de x, $\pi(x)$ es aproximadamente igual a

$$\textbf{(1)} \qquad \frac{x}{\log x - A}, \qquad \text{donde} \qquad A = 1.08366.$$

En 1793, C. F. Gauss propuso una fórmula similar a (1), la cual afirma que para valores grandes de x, $\pi(x)$ es aproximadamente igual a

$$\textbf{(2)} \qquad li(x) = \int_{2}^{x} \frac{dt}{\log t},$$

lo cual no fue publicado en este año, sino hasta 1863.

Es fácil mostrar que (1) y (2) son equivalentes a la fórmula

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \tag{3}$$

es decir, $\pi(x)$ es aproximadamente igual a $x/\log x$, para valores grandes de x. La relación (3) es conocida como el *Teorema de los Números Primos* y es el teorema central en la teoría de la distribución de los números primos.

En 1848, P. L. Chebyshev probó que el mejor valor para la constante A en (1), debe ser 1. En la siguiente Tabla 1 mostraremos las aproximaciones a $\pi(x)$ propuestas por Gauss, Legendre y Chebyshev para algunos valores de x:

x	$\pi(x)$	Gauss	Legendre	$x/(\log x - 1)$
1000	168	178	172	169
10000	1229	1246	1231	1218
100000	9592	9630	9588	9512
1000000	78498	78628	78534	78030
10000000	664579	664918	665138	661459
100000000	5761455	5762209	5769341	5740304
1000000000	50847534	50849235	50917519	50701542
10000000000	455052511	455055614	455743004	454011971

Tabla 1

En 1850, Chebyshev obtuvo el primer progreso verdadero hacia la prueba del teorema de los números primos, demostró que existen dos constantes positivas $a < 1 < b$ tales que

$$a\,\frac{x}{\log x} < \pi(x) < b\,\frac{x}{\log x} \tag{5}$$

y que si $\pi(x)\log x/x$ tiene límite, entonces su valor debe ser igual a 1.

En 1881, J. J. Sylvester refinó el método de Chebyshev, demostrando que podemos usar $a = 0.95695$ y $b = 1.04425$ si x es suficientemente grande. (En 1962 fue demostrado que podemos usar $a = 1$ para todo $x > 10$). Ver Rosser and Schoenfeld (1962).

Una contribución fundamental para investigar el problema de la distribución de los números primos fue realizada por B. Riemann en 1859. Motivado por la demostración analítica de Euler sobre la existencia de una infinidad de números primos, Riemann introdujo la función de variable compleja

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

donde $s = \sigma + it$ y $\sigma = \Re\mathrm{e}\, s > 1$. Esta función es conocida como *la función zeta de Riemann.* La serie converge absolutamente en la región $\sigma > 1$ y de manera uniforme si $\sigma \geq \sigma_0$, para cualquier $\sigma_0 > 1$ y por lo tanto $\zeta(s)$ representa a una función analítica en la región $\sigma > 1$. Riemann demostró que $\zeta(s)$ se puede extender analíticamente a una función meromorfa en todo el plano complejo con un único polo simple de residuo igual a 1 en $s = 1$. Riemann tambien demostró que $\zeta(s)$ satisface una ecuación funcional. De tal ecuación se sigue que los enteros pares negativos anulan a $\zeta(s)$, tales ceros son conocidos como los *ceros triviales.* De las condiciones de simetría de la ecuación funcional se sigue que los ceros que no son triviales deben estar ubicados en la *franja crítica* $0 \leq \sigma \leq 1$, y además simétricamente distribuidos con respecto a la *línea crítica* $\sigma = 1/2$ y al eje real. Los ceros que están en la franja crítica son llamados *ceros no triviales.* Riemann afirmó sin demostración que todos ellos deben estar ubicados en la línea crítica, conjetura aún abierta y conocida como *la hipótesis de Riemann.* Riemann encontró una profunda conexión entre el problema de la distribución de los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ y la distribución de los números primos.

En 1896, J. Hadamard y C. J. de la Vallée-Poussin independientemente uno del otro demostraron el teorema de los números primos totalmente, basados en las ideas desarrolladas por Riemann acerca de la función $\zeta(s)$ y su relación con $\pi(x)$. La prueba dada por Hadamard es más simple, pero de la Vallée-Poussin estudia con más detalle el término de error. También de la Vallée-Poussin demostró que (2) es una mejor aproximación que (1), sin importar el valor que le asignemos a la constante A.

En 1949, Atle Selberg y Paul Erdös, independientemente demuestran el teorema de los números primos, sin usar la teoría de las funciones analíticas, sino argumentos elementales. Ver Selberg (1949) y Erdös (1949).

El término de error en el teorema de los números primos depende de la región en el plano complejo en donde la función zeta de Riemann es libre de ceros. Entre más nos podamos extender dentro de la banda crítica, el término de error será menor.

En el capítulo 3 se demuestra que la función zeta de Riemann es libre de ceros en la región dada por

$$\sigma \;\geq\; 1 - \frac{1}{841\, L(t)},$$

donde $L(t) = \log t + 11$ y $t \geq 2$. Usaremos esta región para estudiar la estimación obtenida por de la Vallée-Poussin en 1899, es decir, él demostró que

$$\textbf{(6)} \qquad \pi(x) \;=\; li(x) + O\big(x\, e^{-c\sqrt{\log x}}\,\big)$$

cuando $x \to \infty$, donde c es una constante positiva. Este resultado lo podemos encontrar en de la Vallée-Poussin (1899-1900).

Con mayor precisión J. E. Littlewood demostró que

$$\textbf{(7)} \qquad \pi(x) \;=\; li(x) + O\big(x\, e^{-c\,(\log x \,\cdot\, \log\log x)^{1/2}}\,\big).$$

En 1901, H. von Koch demuestra algo más fuerte. El probó que

$$\textbf{(8)} \qquad \pi(x) \;=\; li(x) + O\big(x^{\tau} \log x\,\big)$$

donde $\tau \in \mathbb{R}$ es tal que si $\sigma > \tau$ entonces $\zeta(\sigma + it) \neq 0$.

De hecho, si se supone que la Hipótesis de Riemann es cierta, entonces la ecuación (8) de von Koch toma la forma

$$\textbf{(9)} \qquad \pi(x) \;=\; li(x) + O\big(\sqrt{x} \log x\,\big).$$

Finalmente en 1958, Vinogradov demuestra que

$$\textbf{(10)} \qquad \pi(x) \;=\; li(x) + O\big(x\, e^{-\,(\log x)^{3/5-\epsilon}}\,\big).$$

Los resultados (7), (8) y (10), los podemos encontrar en Littlewood (1996), Koch (1901) y Ellison (1985), respectivamente.

Del teorema de los números primos se sigue que para $h \leq x$ tiene lugar la igualdad

$$\pi(x+h) \;-\; \pi(x) \;=\; \frac{x+h}{\log(x+h)} - \frac{x}{\log x} \;+\; o\Big(\frac{x}{\log x}\Big).$$

Encontrar h tal que $\pi(x+h) - \pi(x) > 0$ implica la existencia de un número primo en $(x, x+h]$. Esta observación motiva a investigar las condiciones sobre h para garantizar la existencia de un número primo en el intervalo $(x, x+h]$.

Bertrand conjeturó en 1845 que si $h \geq 2$, entonces $(h, 2h)$ debería contener un número primo. Esta conjetura fue probada por Chebyshev en el año 1851 y además también probó que en el intervalo $(x, x+h]$ hay un número primo, si $x \geq x_0$ y $h \geq \frac{1}{5}x$. De manera natural surgen las siguientes preguntas:

- ¿Qué tan pequeño se puede elegir a $h = h(x)$ de tal forma que en el intervalo $(x, x+h]$ exista al menos un número primo, si x es suficientemente grande?
- ¿Es posible hallar una fórmula asintótica para la cantidad de números primos en el intervalo $(x, x+h]$?

Este problema es conocido como: *El problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos.*

Una forma de abordar este problema es utilizando (6), esto es, si $h \le x$ entonces tenemos

$$\pi(x+h) - \pi(x) = \int_x^{x+h} \frac{dt}{\log t} + O(xe^{-c_1\sqrt{\log x}}), \quad c_1 > 0.$$

De esta forma, basta tomar

$$h = c_2 x e^{-c_3\sqrt{\log x}}; \quad c_2 > 0, \quad c_3 > 0,$$

para garantizar la existencia de un número primo en el intervalo $(x, x+h]$. Más aún, la cantidad de números primos que hay en ese intervalo es asintóticamente $h/\log x$. Asumiendo la Hipótesis de Riemann, es decir, la ecuación (9) y procediendo de manera análoga, al elegir $h = x^{1/2+\varepsilon}$ se garantiza la existencia de un número primo en el intervalo $(x, x+x^{1/2+\varepsilon}]$, para cualquier $\varepsilon > 0$. Además, la cantidad de números primos será asintóticamente $x^{1/2+\varepsilon}/\log x$.

Por último, utilizando el mejor término de error, el cual está dado en la ecuación (10), basta tomar $h(x) = xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x}$ para garantizar la existencia de un número primo en el intervalo $(x, x+xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x}]$, siendo $\varepsilon > 0$ y $x \ge x_0(\varepsilon) > 0$. A pesar de que $xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x} = o(x)$ siempre se tiene $xe^{-\log^{3/5-\varepsilon} x} \ge x^{1-\delta}$, para cualesquiera $\varepsilon, \delta > 0$ y $x \ge x_0(\delta) > 0$. Por tal razón, el teorema de los números primos no garantiza de manera incondicional la existencia de números primos en un intervalo de la forma $(x, x+x^{1-\delta}]$. Sin embargo, en la teoría de la función zeta de Riemann existe una rama muy profunda conocida como la *Teoría de la densidad de los ceros no triviales de la función zeta de Riemann*, de la cual se siguen resultados más fuertes que lo que se deriva del teorema de los números primos.

Se denota por $\rho = \beta + i\gamma$, a cualquier cero no trivial de $\zeta(s)$. Para $T \ge 2$, se definen las funciones

$$\begin{aligned} N(T) &= \sum_{0<\Im\mathrm{m}\,\rho\le T} 1; \\ N(\sigma, T) &= \sum_{\substack{0<|\Im\mathrm{m}\,\rho|\le T \\ \Re\mathrm{e}\,\rho\ge\sigma}} 1, \end{aligned}$$

es decir, $N(T)$ cuenta el número de ceros no triviales de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 < \Im\mathrm{m}\,\rho \leq T$ y $N(\sigma, T)$ cuenta el número de ceros de $\zeta(s)$ en el rectángulo $0 < |\Im\mathrm{m}\,\rho| \leq T$, con $\Re\mathrm{e}\,\rho \geq \sigma$. A la segunda función se le conoce como *función de densidad de los ceros no triviales de* $\zeta(s)$.

El objetivo fundamental de este libro es estudiar el problema de densidad de los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ y su conexión con el problema de la distribución de los números primos en pequeños intervalos. De manera precisa; obtendremos una estimación para $N(\sigma, T)$, la cual permite establecer que para $h(x) \geq x^{3/4+\varepsilon}$, con $\varepsilon > 0$ y $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$, existe un número primo en el intervalo $(x, x + h(x)]$. Más aún, la cantidad de números primos que hay en ese intervalo es asintóticamente como $h(x)/\log x$. Además, en el proceso de estudio vamos a aprender cómo se aplica el Teorema del Valor Medio de Vinogradov para obtener la región libre de ceros de $\zeta(s)$ que de hecho es el mejor resultado conocido en la actualidad. También veremos que la aplicación de este resultado establece (10).

Capítulo 1

Conceptos y teoremas elementales

§1. Introducción

En este capítulo se dan algunos conceptos y teoremas básicos de la teoría analítica de los números que serán necesarios para el estudio de la distribución de los números primos. Las letras p, p_1, p_2, $\cdots$, denotan números primos.

§2. Definiciones básicas

En esta sección se definen algunas funciones aritméticas, en donde entendemos por una función aritmética una sucesión de números reales o complejos.

Definición 1.1. La función de Möbius $\mu(n)$, se define por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1; \\ 0, & \text{si } p^2 | n; \\ (-1)^k, & \text{si } n = p_1 p_2 \ldots p_k. \end{cases}$$

Definición 1.2. La función de von Mangoldt $\Lambda(n)$, se define en la manera siguiente

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{si } n = p^k; \\ 0, & \text{si } n \neq p^k. \end{cases}$$

Definición 1.3. Para una función aritmética f definimos la función suma de f por

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n),$$

en donde x es un número real dado. En el caso particular de la función aritmética $f(n) = 1$ si n es un número primo y 0 en otro caso, tenemos

$$\sum_{n \leq x} f(n) \;=\; \sum_{p \leq x} 1 \;=\; \pi(x),$$

donde la segunda suma corre sobre todos los números primos. Otro ejemplo de una función suma es la función de Chebyshev, la cual está definida como

$$\psi(x) \;=\; \sum_{n \leq x} \Lambda(n), \qquad\quad x > 0.$$

En la siguiente definición se plantea la función que cuenta todos los divisores de un número natural n.

Definición 1.4. Para todo entero positivo n, la función $\tau(n)$ indica la cantidad de divisores de n, es decir,

$$\tau(n) \;=\; \sum_{d|n} 1.$$

Definición 1.5. Para cualquier número real u, definimos la parte entera de u, la cual la denotamos por $[u]$ como el entero más cercano a u tal que $u - [u] \geq 0$. El número $0 \leq u - [u] < 1$ es conocido como la parte fraccionaria de u y se denota por $\{u\}$. Se definen las siguientes funciones de variable real

$$\begin{aligned} \rho(u) &= 1/2 - \{u\}, \\ ||u|| &= \text{mín}(\{u\}, 1 - \{u\}). \end{aligned}$$

En la siguiente definición introducimos la notación de Landau.

Definición 1.6. Sea $g(x)$ una función positiva. Sea $f(x)$ una función real o compleja. Escribimos $f(x) = O(g(x))$, o de manera equivalente la notación introducida por Vinogradov $f(x) \ll g(x)$, si existe una constante $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq cg(x)$. Por otro lado, se denota $f(x) = o(g(x))$ para indicar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; 0.$$

Se dice que $f(x)$ es asintóticamente igual a $g(x)$ si

$$f(x) \;= g(x)(1 \,+\, o(1)).$$

§3. Fórmulas de sumación

Los siguientes lemas nos proporcionan fórmulas para obtener el comportamiento asintótico de una suma parcial, al compararla con una integral.

Lema 1.7. (Fórmula de Sumación de Abel). *Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos. Sea $f(u)$ una función continuamente diferenciable en $[a,b]$. Entonces tiene lugar la igualdad*

$$\sum_{a<n\leq b} c_n f(n) \;=\; -\int_a^b C(u)f'(u)du \;+\; C(b)f(b),$$

donde $C(u) = \sum\limits_{a<n\leq u} c_n$.

Demostración. Es suficiente demostrar que

$$\sum_{a<n\leq b} c_n(f(b)-f(n)) \;=\; \int_a^b C(u)f'(u)du.$$

Observe que

$$\sum_{a<n\leq b} c_n(f(b)-f(n)) \;=\; \sum_{a<n\leq b} c_n \int_n^b f'(u)du \;=\; \sum_{a<n\leq b} c_n \int_a^b f'(u)g(u;n)du,$$

donde

$$g(u;n) \;=\; \begin{cases} 1 \text{ si, } n\leq u\leq b; \\ 0 \text{ si, } a<u<n. \end{cases}$$

De esta forma, se deduce

$$\int_a^b \sum_{a<n\leq b} c_n f'(u)g(u;n)du \;=\; \int_a^b \sum_{a<n\leq u} c_n f'(u)du \;=\; \int_a^b C(u)f'(u)du. \quad \square$$

Lema 1.8. (Fórmula de Sumación de Euler). *Sea $f(u)$ una función continuamente diferenciable en $[a,b]$. Entonces tiene lugar la igualdad*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) \;=\; \int_a^b f(u)du + \rho(b)f(b) \;-\; \rho(a)f(a) \;-\; \int_a^b \rho(u)f'(u)du,$$

donde $\rho(u)$ *es la función definida en* (1.5).

Demostración. Si definimos $C(u) = \sum_{a<n\leq u} 1$, entonces

$$C(u) = \sum_{a<n\leq u} 1 = [u] - [a] = (u - 1/2 + \rho(u)) - (a - 1/2 + \rho(a)) = u - a - \rho(a) + \rho(u).$$

Aplicando el Lema 1.7 se tiene

$$(\mathbf{1.9}) \quad \sum_{a<n\leq b} f(n) = -\int_a^b (u - a - \rho(a))f'(u)du - \int_a^b \rho(u)f'(u)du + (b - a - \rho(a) + \rho(b))f(b).$$

Por otro lado, integrando por partes se tiene

$$(\mathbf{1.10}) \qquad -\int_a^b (u - a - \rho(a))f'(u)du = -(u - a - \rho(a))f(u)\Big|_{u=a}^{u=b} + \int_a^b f(u)du.$$

Sustituyendo la ecuación (1.10) en (1.9), deducimos

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(u)du + \rho(b)f(b) - \rho(a)f(a) - \int_a^b \rho(u)f'(u)du. \quad \square$$

Lema 1.11. (Fórmula de sumación de Poisson). *Sea* $F \in L^1(\mathbb{R})$. *Suponga que la serie*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v)$$

converge absoluta y de manera uniforme en la variable v. *Si además*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(m)| \; < \; \infty,$$

entonces se tiene que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v) \; = \; \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)e^{2\pi inv}.$$

Demostración. La función

$$G(v) \; = \; \sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v)$$

es una función continua de periodo 1. Los coeficientes de Fourier de $G(v)$ están dados por

$$c_m = \int_0^1 G(v)e^{-2\pi imv}dv = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^1 F(n+v)e^{-2\pi imv}dv$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} F(x)e^{-2\pi imx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-2\pi imx}dx = \widehat{F}(m).$$

Dado que $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{F}(m)| < \infty$, podemos representar a $G(v)$ por su serie de Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} F(n+v) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{F}(n)e^{2\pi inv}.$$

El Lema está demostrado. $\square$

El siguiente Corolario es una consecuencia del Lema 1.11.

Corolario 1.12. (Ecuación funcional de $\theta(x)$). *Sea*

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi xn^2}.$$

Entonces, para $x > 0$ se tiene

$$\theta\Big(\frac{1}{x}\Big) = \sqrt{x}\,\theta(x).$$

Demostración. Observe que, de existir, la transformada de Fourier de $F(x/t)$ es $|t|\widehat{F}(tu)$. Notemos que, si $F(t) = e^{-\pi t^2}$ entonces $\widehat{F}(t) = e^{-\pi t^2}$. Por lo tanto $e^{-\pi(t/\sqrt{x})^2}$ tiene transformada

$$\sqrt{x}\, e^{-\pi t^2 x}.$$

Aplicando el Lema 1.11, se deduce

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n/\sqrt{x})^2} = \sqrt{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 x}. \quad \square$$

Una consecuencia del Corolario 1.12 es la siguiente

$$\omega(1/x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + \sqrt{x}\,\omega(x), \tag{1.13}$$

en donde

$$\textbf{(1.14)} \qquad \omega(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi x n^2}.$$

Lo cual es claro al observar que $\theta(x) = 1 + 2\,\omega(x)$.

§4. Estimación de Van der Corput

Una suma y una integral trigonométrica, respectivamente, son sumas e integrales de la forma

$$\sum_{a<n\leq b} \varphi(n) e^{2\pi i f(n)}\ , \quad \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx\ ,$$

donde $f(x)$ y $\varphi(x)$ son funciones reales. Las sumas trigonométricas son objetos muy complicados los cuales son difíciles de investigar, mientras que la construcción de integrales trigonométricas es mucho más simple y pueden ser estudiadas mediante métodos del Análisis matemático.

Lema 1.15. (Van der Corput). *Sea $f(x)$ una función de variable real continuamente diferenciable en el intervalo $[a,b]$ con derivada monótona. Si además $|f'(x)| \leq \delta < 1$, entonces*

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi i f(n)} \;=\; \int_a^b e^{2\pi i f(x)} dx + O\Big(\frac{1}{1-\delta}\Big),$$

donde la constante implicada de O es absoluta.

Demostración. Para n fijo sea

$$F_n(x) \;=\; e^{2\pi i f(n+x)}, \qquad 0 < x < 1.$$

Definamos a $F_n(x)$ en los puntos 0 y 1 como

$$F_n(0) \;=\; F_n(1) \;=\; \frac{e^{2\pi i f(n)} + e^{2\pi i f(n+1)}}{2}.$$

Ahora extendamos el dominio de la función a todos los reales de manera que $F_n(x)$ tenga periodo 1.

Utilizemos el siguiente resultado, que pertenece a la teoría de series de Fourier:

Sea $f(x)$ una función con periodo 1 definida en los reales, con a lo más, un número finito de discontinuidades de primera especie en $[0,1]$. Si, aparte de las discontinuidades, f tiene derivada continua en $[0,1]$, entonces la serie de Fourier converge a $f(x)$ en todos los puntos donde sea continua. Para los puntos x_0 de discontinuidad se tiene

$$f(x_0) \; = \; \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) \; + \; \lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

De esta forma, $F_n(x)$ admite la expansión en serie de Fourier

$$F_n(x) \; = \; \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m(n)\, e^{2\pi imx},$$

donde

$$c_m(n) \; = \; \int_0^1 F_n(u)e^{-2\pi imu}du.$$

Si $m \neq 0$ entonces por integración por partes tenemos

$$c_m(n) \; = \; -\frac{1}{2\pi im}\int_0^1 e^{2\pi if(n+u)}d(e^{-2\pi imu})$$

$$= \; \frac{1}{2\pi im}(e^{2\pi if(n)} - e^{2\pi if(n+1)}) + \frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+u)e^{2\pi i(f(n+u)-mu)}du.$$

Al evaluar $F_n(x)$ en $x = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} F_n(1) \quad &= \quad \frac{e^{2\pi if(n)} + e^{2\pi if(n+1)}}{2} \; = \; \int_0^1 e^{2\pi if(n+u)}du \; + \; \sum_{m\neq 0} c_m(n) \\ &= \quad \int_0^1 e^{2\pi if(n+u)}du \; + \; \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\int_0^1 f'(n+u)e^{2\pi i(f(n+u)-mu)}du \\ &= \quad \int_n^{n+1} e^{2\pi if(u)}du \; + \; \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}\int_n^{n+1} f'(u)e^{2\pi i(f(u)-mu)}du. \end{aligned}$$

Sumando sobre $a < n \leq b$, se tiene

$$\sum_{a<n\leq b} e^{2\pi if(n)} \; = \; \int_a^b e^{2\pi if(u)}du \; + \; \sum_{m\neq 0}\frac{1}{m}U_m \; + \; O(1),$$