

ENRIQUE VILLARREAL RÍOS

BIOESTADÍSTICA APLICADA AL DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



ENRIQUE VILLARREAL RÍOS

**BIOESTADÍSTICA
APLICADA AL DISEÑO
DE INVESTIGACIÓN**



Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

©Enrique Villarreal Ríos, 2026 (edición ebook)

Reservados todos los derechos.

«No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.»

Ediciones Díaz de Santos

Internet: <http://www.editdiazdesantos.com>

E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-596-8 (edición papel)

e-ISBN: 978-84-9052-597-5 (edición digital)

Depósito Legal: M-12557-2026

Diseño de cubierta y Fotocomposición: P55 Servicios Culturales

AUTOR

- Licenciado en Medicina, Universidad Autónoma Metropolitana
- Especialista en Medicina Familiar, Universidad Nacional Autónoma de México
- Maestro en Ciencias en Sistemas de Salud, Instituto Nacional de Salud Pública
- Maestro en Filosofía, Facultad de Filosofía, Universidad Autónoma de Querétaro
- Director, Unidad de Investigación Epidemiológica y en Servicios de Salud Querétaro, Instituto Mexicano del Seguro Social
- Profesor de Bioestadística, Residencia de Medicina Familiar Querétaro, Instituto Mexicano del Seguro Social Querétaro
- Profesor de Bioestadística, Maestría en Química Clínica, Facultad de Química, Universidad Autónoma de Querétaro
- Miembro de la Comisión de Investigación Científica del Colegio de Médicos Familiares y Generales de Querétaro

Datos de localización

Correo electrónico: enriquevillarrealrios@gmail.com

PROEMIO

En la sociedad hipermoderna el discurso incluye el mercado, los derechos del hombre, el individualismo y la tecnociencia, sin embargo en ella lo que importa es el fin, la forma para llegar al fin no interesa, es relegada a segundo término.

La Investigación Científica no escapa a esta tendencia; en particular en el caso de la bioestadística las herramientas electrónicas, entiéndase por ello programas estadísticos de cómputo, son un claro ejemplo. Su uso permite ahorrar tiempo, procedimientos que anteriormente requerían de días o en ocasiones semanas, en la actualidad se pueden realizar en minutos. Esto, evidentemente, es un gran avance.

No obstante, la tecnificación excesiva, particularmente en el terreno académico, conceptual y de la razón, se acompaña de riesgos. Olvidar o no entender el marco conceptual, olvidarse del aspecto epistemológico, olvidarse de la lógica que da sustento al proceso técnico es un grave riesgo, es quedar vacío y existir en la nada.

En la actualidad, con los avances tecnológicos cualquier persona que se apoye en un programa estadístico puede realizar la prueba estadística que desee, pero esto es solamente técnica. Para ello no se requiere de un marco conceptual, ni de un proceso lógico, basta con oprimir una tecla y el resultado estará disponible. Eso no es realizar análisis estadístico. Los programas estadísticos son solamente una herramienta que de ninguna manera sustituyen al uso de la razón, no obstante, de pronto pareciera que esta, la razón, es desplazada por la herramienta tecnológica y entonces la razón pasa a un segundo plano, cuando no a desaparecer.

En estos tiempos, en el análisis estadístico que se hace a los proyectos de investigación pareciera que el referente mágico es la significancia estadística, el valor 0.050. Identificarlo permite aceptar o rechazar la hipótesis nula, pero no necesariamente significa entender la lógica que respalda la decisión. Este panorama convierte al investigador en un individuo que replica conceptos sin entender el significado, los reproduce por tradición, lo cual es muy grave ya que lo aleja del uso de la razón en sentido extenso.

En este texto, cuando se plantea entrar al mundo de la bioestadística no se propone como una actividad aislada, alejada del mundo, alejada de otras actividades que cotidianamente se presentan, como si se tratara de un ermitaño en el terreno académico. Tampoco se propone abordarla como una actividad vacía, fría, sin sustento conceptual y lógico.

La propuesta contempla abordar la bioestadística con relación al todo (aunque el todo es temporal, es relativo, es cambiante y probablemente el todo no existe), desde la perspectiva de la teoría general de sistemas, como una de las partes que integran el todo y sin la cual no se puede llegar al todo. En este caso, en el terreno académico, cuando se habla del todo se está hablando del conocimiento.

De igual forma, en relación a ella misma, a la bioestadística misma como una actividad que obedece a un marco conceptual y a una lógica que le permite alcanzar el fin, lo que se pretende destacar son los medios que emplea, más allá del fin; y aún más, la propuesta del libro no es abordar la bioestadística como bioestadístico, la propuesta pretende llevar la bioestadística del mundo teórico al mundo aplicado, propuesta que significa alejarse de algunos preceptos que para el bioestadístico son incuestionables pero que al momento de convertir la bioestadística en una parte del proceso de investigación científica, la perspectiva puramente teórica se deja atrás y se aterriza en la bioestadística aplicada.

Como una parte del todo la bioestadística se presenta íntimamente relacionada con la pregunta de investigación, el objetivo, la hipótesis y el diseño empleado. La elección de la prueba estadística necesariamente se debe dar en esta lógica, pregunta-objetivo-hipótesis-diseño. El investigador está obligado a reconocerla, debe hacer consciente la relación que precede a la prueba estadística, en el contexto de la investigación; la elección de la prueba estadística no se puede realizar fuera de este contexto.

Por otro lado, al interior de la prueba estadística también es necesario identificar el marco conceptual y la lógica que respaldan a la prueba estadística. Es decir, la relación información, tipo de distribución, hipótesis estadística, teórica, hipótesis estadística aplicada, hipótesis de investigación, prueba estadística, criterios de referencia, cálculo de la prueba estadística, decisión estadística, nivel de confianza, valor de p , tipo de error, conclusión de investigación.

En este sentido la propuesta del libro no pretende el resultado de la prueba estadística, la propuesta va en pos de la aprehensión de la lógica para la elección de la prueba estadística en el contexto de la investigación

científica; y al interior de la prueba, la propuesta va en pos de la aprehensión de la lógica empleada, desde el planteamiento pasando por la decisión estadística para llegar a la conclusión de investigación, un concepto. En este contexto, en cada una de las pruebas estadísticas presentadas se replican los pasos, pretendiendo así alcanzar la sistematización sin alejarse de la razón.

Enrique Villarreal Ríos

ÍNDICE

| | |
|---|------------|
| Autor | VII |
| Dedicatoria | IX |
| Proemio..... | XI |
| 1. Generación del conocimiento | 1 |
| 2. Variables..... | 11 |
| 3. Técnicas de conteo..... | 15 |
| 4. Distribución binomial..... | 19 |
| 5. Medidas de tendencia central y medidas de dispersión | 23 |
| 6. Distribución normal | 33 |
| 7. Tamaño de la muestra | 41 |
| 8. Análisis estadístico en investigación..... | 57 |
| 9. Elección de la prueba estadística inferencial | 63 |
| 10. Diseños de investigación..... | 69 |
| 11. Prueba de hipótesis | 75 |
| 12. Chi cuadrada | 85 |
| 13. Razón de momios e intervalo de confianza de razón de momios..... | 93 |
| 14. Riesgo relativo e intervalo de confianza de riesgo relativo | 103 |
| 15. Intervalos de confianza para porcentajes y promedios | 111 |
| 16. Prueba de t de student | 123 |
| 17. Prueba de Z para prevalencias | 139 |
| 18. Prueba de análisis de varianza (para muestras independientes)..... | 147 |
| 19. Prueba de Mann-Whitney | 159 |
| 20. Prueba de Wilcoxon para muestras pareadas (antes-después)..... | 165 |
| 21. Prueba de Kruskal-Wallis..... | 173 |
| 22. Prueba de Friedman..... | 181 |
| Bibliografía | 189 |
| Anexos..... | 193 |

GENERACIÓN DEL CONOCIMIENTO

Hablar del mundo circundante, hablar de la realidad, es hablar de una estructura involucrada en un proceso permanente de cambio influenciado por la multiplicidad de factores en él contenidos, el ser humano incluido entre ellos. Este personaje, a diferencia del resto de los factores y del resto de los seres vivos, en un momento del devenir decide alejarse del mito y del dogma para tener una explicación racional y objetiva de la realidad. En ese momento inicia un proceso de búsqueda para entender, explicar, interpretar y conceptualizar la realidad, el mundo, todo lo en él contenido. En ese momento busca generar conocimiento.

La realidad, con todas las relaciones incluidas en ella, existe desde siempre y existirá más allá de ser accesible para el humano, y aún más, cambiará con el tiempo y seguirá siendo realidad que en algún momento del tiempo se encontrará con el ser humano para ser explicada, interpretada y conceptualizada. Pero aun en ese momento la realidad continuará siendo la realidad, más allá de la correcta o incorrecta interpretación ofrecida por el ser humano. Se podría decir que es una verdad temporal y por lo tanto cambiante.

La forma de llegar al conocimiento es diversa. Al respecto las posturas filosóficas, entre otras, van del empirismo, al racionalismo, al positivismo, al criticismo y al realismo; posturas cada una con un enfoque diferente pero con argumentos lógicos que las mantienen vigentes. Algunas posturas privilegian la evidencia, otras la razón, otras más la experiencia, otras la relación entre experiencia y razón, y aquellas que privilegian al objeto. Posturas todas ellas que teorizan y analizan el método empleado para llegar al conocimiento en la práctica cotidiana. Al respecto, el método científico y la investigación científica es una forma.

La razón de ser de la investigación científica empleando el método científico es generar conocimiento, identificar la verdad, propuesta que equivale a identificar la relación existente entre los factores; en el sentido

más puro es establecer la relación entre causa y efecto, es decir identificar la causalidad. Pero en el sentido amplio de generar conocimiento y establecer la verdad, la investigación científica no se limita a la relación de causalidad. En este contexto, puede alcanzar la asociación entre factores sin que se determine el sentido de la relación, o puede alcanzar la diferencia de comportamiento entre los factores de estudios, e incluso puede centrarse en uno solo de los factores y describir las características del propio factor y de su entorno. Desde esta perspectiva la generación del conocimiento rebasa los límites de la causalidad y confronta el concepto clásico del término en el ámbito científico; es verdad que no identifica la relación causal, identifica la relación entre variables o identifica el comportamiento de una sola variable.

En torno al conocimiento se debe identificar dos perspectivas, la generación del conocimiento y la adquisición del conocimiento.

En el primero, en la generación de conocimiento, el ser humano es simple espectador a pesar de estar activamente involucrado en el proceso de generación. En ese caso el humano no importa, lo importante es el comportamiento o la relación que se establece entre los factores que integran la realidad, condición que existe antes de ser identificada por el ser humano; esto significa que la realidad o el conocimiento va más allá del humano y antes del humano.

Después de la generación del conocimiento, objetivo de la ciencia, la adquisición de ese conocimiento por el ser humano sigue otro proceso totalmente diferente para incorporarlo al consciente personal del ser humano como individuo o para incorporarlo al consciente colectivo de la sociedad. Este proceso es independiente del proceso científico, no obstante puede ser objeto de estudio.

La línea entre generación de conocimiento y adquisición del conocimiento parece ser muy delgada y en ocasiones superponerse, no obstante el científico y el pedagogo tienen clara la diferencia, y distinguen el método científico y el método pedagógico. En el primero se genera el conocimiento y en el segundo se incorpora el conocimiento generado, y si se continuara con el proceso, este se extiende a la utilización del conocimiento que en ese momento ya se ha transformado en información. Ese es otro tema.

En la literatura se han descrito características indispensables para definir cuándo el conocimiento es conocimiento. En torno al abordaje para la explicación del mundo natural o social existen dos propuestas.

La primera propuesta postula el papel del Investigador desde una perspectiva activa física (experimentación), en ella el investigador modifica deliberadamente las condiciones y comportamiento de una de las variables que intervienen en el fenómeno de estudio, actividad siempre complementada por la observación y el análisis racional. Evidentemente la propuesta implica tomar una parte de la realidad y modificarla en un punto específico, pero siempre sustentada en un marco conceptual. En este caso la realidad se modela con características propias, aunque en ocasiones ese modelaje de la realidad es perspectiva del investigador sin que necesariamente sea compartida por el resto, pero invariablemente de ello plantea una visión a futuro.

En la segunda propuesta el papel del investigador se centra en la observación y el análisis racional. En ella el investigador no modifica intencionalmente el comportamiento de las variables que determinan el fenómeno; la experimentación queda fuera de este proceso. Claro que se podría argumentar que antes del análisis racional existe un proceso de experimentación natural en el que las variables interactúan de una determinada manera, es verdad la aseveración, por lo tanto es obligación del investigador identificar ese proceso para poder establecer el comportamiento de la relación causal existente entre las variables.

Si bien en lo señalado la relación de las variables identifica la causa y el efecto para ubicarse en el contexto de la causalidad, cuando se genera conocimiento basado en la observación la relación puede establecerse en una relación de asociación no causal, pero a fin de cuentas relación entre variables; o puede establecerse en términos de diferencia ente variables o grupos, lo cual también es conocimiento; y finalmente, en el contexto de la investigación observacional, el conocimiento se puede representar por la identificación del comportamiento de un fenómeno en particular.

En ambas propuestas el producto siempre es la generación de conocimiento en cualquiera de sus dimensiones, la causalidad, la asociación no causal, la diferencia o la prevalencia.

Ante este panorama y en el contexto de un mundo probable y cambiante, donde la verdad es efímera en el largo plazo, cada una de las dimensiones que se pueden alcanzar en el proceso de generación del conocimiento tienen características propias, algunas de ellas indispensables para asegurar qué es conocimiento; o tal vez de lo que se debería hablar es de la verdad temporal en cualquiera de las cuatro dimensiones señaladas. En consecuencia, se deben identificar los criterios que necesariamente

deben estar presentes para hablar de verdad temporal. Esta propuesta va más allá de los criterios de causalidad que en la literatura erróneamente se han adoptado como sinónimo de conocimiento.

Existen criterios que son imprescindibles para poder asegurar que el conocimiento es conocimiento; existen criterios generales que son imprescindibles y que deben estar presentes en cualquiera de las dimensiones: criterios propios de la prevalencia, criterios propios de la diferencia, criterios propios de la asociación no causal, criterios propios de la causalidad y criterios propios de la experimentación.

CRITERIOS IMPRESCINDIBLES PARA HABLAR DE CONOCIMIENTO

- **Plausibilidad.** En el contexto científico la plausibilidad se refiere a la explicación funcional específica de una relación o de un evento. En el ámbito clínico corresponde al sustento fisiopatológico, si el ámbito es el económico el sustento necesariamente tendrá que ser económico, y así respectivamente para cada disciplina. La plausibilidad es indispensable en el proceso de generación de conocimiento. Desde esta perspectiva la plausibilidad debe estar presente en la causalidad, en la asociación no causal, en la diferencia y en la prevalencia. Su ausencia elimina la posibilidad de hablar de conocimiento.
- **Significancia estadística.** Si la explicación se realiza desde la perspectiva estadística, entonces es indispensable que se encuentre presente la significancia estadística, aquella relación que cuente con sustento teórico pero que no se logre demostrar estadísticamente; desde esta perspectiva, no se puede considerar como conocimiento. Al respecto el punto de referencia adoptado generalmente se establece en 95% pero este referente podrá ser modificado. La significancia estadística debe estar presente en la causalidad, en la asociación no causal, en la diferencia y en la prevalencia.
- **Coherencia con el conocimiento.** Hablar de consistencia con el conocimiento existente significa que el resultado de la investigación coincide con los resultados aceptados como verdad por la comunidad científica, esto sin duda es inobjetable. No obstante, si una de las características de la ciencia postula que el conocimiento es falible y temporal, entonces el resultado de una nueva investigación puede no ser coherente con el conocimiento existente y se puede llegar a convertir en nuevo conocimiento que substituirá al viejo conocimiento;

para que esta sustitución se materialice, el resultado de una nueva investigación que diverja de la tendencia predominante en ese momento del tiempo, deberá ser reforzado por estudios con resultados similares. En ese momento el nuevo conocimiento sustituirá al viejo conocimiento y con ello el cambio de paradigma, planteamiento que involucra todas las dimensiones del conocimiento: causalidad, asociación no causal, diferencia y prevalencia.

- **Divergencia con el conocimiento existente.** Derivado de lo señalado en la coherencia del conocimiento, por contradictorio que pueda parecer, la generación del conocimiento requiere en determinado momento romper con lo aceptado como verdad y proponer una nueva verdad, la cual invariablemente deberá estar respaldada por resultados en el mismo sentido que vayan fortaleciendo y constituyendo ese nuevo concepto como verdad. Este planteamiento está presente en todas las dimensiones del conocimiento: causalidad, asociación no causal, diferencia y prevalencia.

CRITERIOS PROPIOS DE LA PREVALENCIA

- **Prevalencia.** Es la ocurrencia de un fenómeno determinado en un evento determinado y en un momento determinado. Se estima para un solo grupo; al interior de ese grupo no se compara, pero sí es comparable con la ocurrencia del fenómeno publicado en otros grupos o poblaciones. Están presentes únicamente en el diseño transversal descriptivo.

CRITERIOS PROPIOS DE LA ASOCIACIÓN CAUSAL O NO CAUSAL

- **Fuerza de asociación entre variables.** La fuerza de asociación corresponde a la intensidad de la relación que se establece entre las variables; cuanto más alta, mayor la fuerza. En el diseño experimental aleatorizado, el cuasi experimental y la cohorte, se identifica con el riesgo relativo y está determinada por la relación entre los expuestos enfermos y los no expuestos enfermos; cuanto más grande sea la diferencia entre los grupos de comparación, la fuerza de asociación será mayor. En estos tres diseños la fuerza de asociación es causal. En el diseño de casos y controles la fuerza de la asociación también es causal y se identifica por la razón de momios, que es una aproxi-

mación al riesgo relativo y está medida a partir de los enfermos (caso) expuestos y los no enfermos (control) expuestos.

En el diseño transversal analítico la fuerza de asociación también está presente, pero a diferencia de los diseños anteriores la fuerza de la asociación es no causal y se representa mediante la razón de momios. En el diseño transversal descriptivo, caracterizados por poseer un solo grupo, no se puede medir fuerza de asociación.

- **Especificidad de la asociación entre variables.** En términos estrictos, la especificidad de la asociación identifica una exposición específica y la consecuencia específica derivada de la exposición. Al respecto se deberá reconocer que en un ambiente controlado como es el laboratorio, la especificidad es clara y directa, la presencia de la causa, significa obligadamente la presencia del efecto. No obstante, en la investigación clínica, epidemiológica y en servicios de salud, al estudiar grupos de personas, poblaciones o sistemas, en las que no se tienen controladas el resto de las características, se incursiona en el terreno de los síndromes, en consecuencia la especificidad se traslada al terreno de la probabilidad, lo que significa que ante la presencia del factor (causa) existe determinada probabilidad de ocurrencia del efecto. En buena medida dependerá del propio factor pero no se puede negar que, en compañía de otras variables, esa misma característica puede no ser específica en la relación.

Evidentemente lo señalado cuestiona el concepto de causa suficiente, no así el de causa necesaria. Es verdad que aquí se ha planteado como relación causa efecto, pero en escenarios de no causalidad, caracterizados por no identificar la direccionalidad de la relación, como sucede en los diseños de asociación no causal o de diferencia, la explicación ofrecida anteriormente no tiene cabida.

Sin duda en el diseño transversal descriptivo no está presente la especificidad de la asociación entre variables por corresponder a una sola variable.

- **Consistencia de la asociación.** La consistencia de la asociación se alcanza cuando diferentes estudios realizados en torno al tema, presenta resultados similares. Al respecto, deberá señalarse que esta característica no es exclusiva de los diseños de causalidad, para fines prácticos es un requisito de cualquier diseño de investigación, causal, asociación o diferencia. Plantear la consistencia de la asociación como requisito indispensable para la generación del conocimiento tiene implicaciones:

la afirmación pone en duda la posibilidad de generar nuevo conocimiento. Si el producto de la investigación es totalmente diferente a lo previamente conocido, bajo esta afirmación se descartaría, y en ese escenario nunca existiría la posibilidad de generar nuevo conocimiento. También es verdad que un solo resultado de investigación no necesariamente se puede constituir como verdad, se requiere el mismo resultado en varias investigaciones. Este es un tema para debatir.

- **Gradiente.** El gradiente involucra el grado de exposición y la consecuencia. Así planteado, el gradiente tiene explicación en el ensayo aleatorizado, cuasi experimental, cohorte y casos y controles, diseños en los que se alcanza la causalidad; pero en un sentido extenso el gradiente rebasa la dimensión de causalidad y tiene cabida en el diseño transversal analítico, el problema en este caso se presenta por la ausencia de una causa y un efecto. En consecuencia, es difícil definir a quién se le asigna la exposición y a quién la respuesta. En el diseño transversal descriptivo, en el contexto de la relación entre dos variables, el gradiente no se puede medir.

CRITERIOS PROPIOS DE LA CAUSALIDAD

- **Temporalidad.** Hablar de temporalidad significa que la variable independiente (causa) ocurrió antes de la ocurrencia de la variable dependiente (efecto). Esta relación se presenta de manera natural en el diseño aleatorizado, cuasi experimento y cohorte. En el diseño de casos y controles también está presente, pero en ellos el investigador debe asegurar la temporalidad; si no lo logra, entonces el diseño será transversal analítico y no existirá causalidad. Además de este diseño, el diseño transversal descriptivo tampoco alcanza temporalidad.

CRITERIOS PROPIOS DE LA INTERVENCIÓN

- **Experimentación.** Experimentación implica la manipulación de la variable independiente (causa) por parte del investigador para medir la consecuencia en la variable dependiente (efecto), escenario que se limita al ensayo aleatorizado y cuasi experimento.

Ante este panorama, en el proceso de generación del conocimiento se puede hablar de verdad temporal en cualquiera de las dimensiones: causalidad, asociación no causal, diferencia o prevalencia.

Tabla 1.1. Tipo de dimensión alcanzada y diseños de investigación epidemiológica.

| Conocimiento | Dimensión | Abordaje | Diseño |
|--------------------------------------|--------------------------|---------------|--|
| Conocimiento (verdad temporal) | Causalidad | Experimental | Ensayo aleatorizado Cuasi experimento |
| | | Observacional | Analítico |
| | Transversal analítico | | |
| | Prevalencia | Descriptivo | Transversal descriptivo |

Tabla 1.2. Criterios de conocimiento (Verdad Temporal) por tipo de diseño y dimensión alcanzada.

| Criterios que respaldan la Verdad Temporal (conocimiento) | Dimensión alcanzada | | | | | |
|--|-------------------------|-------------------|---------|-------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| | Causalidad | | | | Asociación no causal o Diferencia | Prevalencia |
| | Diseños Epidemiológicos | | | | | |
| | Ensayo aleatorizado | Cuasi experimento | Cohorte | Casos y controles | Transversal analítico | Transversal descriptivo |
| Criterios imprescindibles | | | | | | |
| Plausibilidad | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí |
| Significancia estadística | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí |
| Coherencia con el conocimiento existente | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí |
| Divergencia con el conocimiento existente | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí |
| Criterios propios de la prevalencia | | | | | | |
| Prevalencia | No | No | No | No | No | Sí |
| Criterios propios de la asociación causal o no causal | | | | | | |
| Fuerza de asociación entre variables | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | No |
| Especificidad de la asociación entre variables | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | No |
| Consistencia de la asociación de las variables | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | No |
| Gradiente | Sí | Sí | Sí | Sí | Sí | No |
| Criterios propios de la causalidad | | | | | | |
| Temporalidad | Sí | Sí | Sí | Sí | No | No |
| Criterios propios de la intervención | | | | | | |
| Experimentación | Sí | Sí | No | No | No | No |

VARIABLES

CONCEPTO

Se define como variable la característica o cualidad que puede existir en diferente magnitud dentro de un espectro de posibilidades. Cuando se realiza investigación es deseable que exista variación en la característica que se estudia del fenómeno. Lo peor para la investigación es que la variación no exista: cuando no existe variación, las posibilidades de análisis se terminan. Las variables se pueden clasificar en cuantitativas y cualitativas. Las variables se miden en el sujeto de estudio y posteriormente se analizan en toda la muestra.

La propuesta del libro contempla considerar a las variables de intervalo y de razón como variables cuantitativas continua o discreta, y añadido a ellas incluir como variables cualitativas la ordinal y nominal. En consecuencia, a partir de estas cuatro variables, integrarlas en dos grupos, variables cuantitativas (continua y discreta) y variables cualitativas (ordinal y nominal).

VARIABLES CUANTITATIVAS

Las variables cuantitativas se caracterizan por la medición numérica de la característica o cualidad. Entre este tipo de variables se pueden mencionar las de intervalo y las de razón, no obstante cualquiera de ellas a su vez se pueden clasificar como continuas o discretas.

- **Variable de intervalo.** Se mide en valor numérico, puede tener valores negativos y carecen de cero absoluto. Un ejemplo frecuente de esta variable es la temperatura, no obstante se debe realizar un señalamiento: cuando la temperatura se mide en grados centígrados o grados fahrenheit, se encuentran valores positivos y negativos y

no tiene cero absoluto, sin embargo cuando la temperatura se mide en grados Kelvin el cero absoluto sí existe y equivale a -273.15 grados centígrados, lo que significa que si la temperatura se mide en grados Kelvin no se puede considerar variable de intervalo, adquiere la categoría de variable de razón. La implicación de ello es la naturaleza de la variable y la escala de medición en que se quiera operacionalizar.

- **Variable de razón.** Se mide en valor numérico, no tiene valores negativos y cuenta con cero absoluto. Ejemplo de este tipo de variable es la estatura, el peso y la calificación. Es verdad que estas variables no tienen valores negativos, no obstante decir que tienen cero absoluto es un poco contradictorio, porque la presencia de cero absoluto en la variable estatura o peso es afirmar la no existencia; sin embargo, en la variable calificación puede existir. Al respecto se puede hacer toda una disertación epistemológica.
- **Variable continua.** Se mide en valores numéricos y entre cada valor existe una infinidad de valores. Ejemplo de ello es la distancia medida en kilómetros, metros o centímetros, en este caso, entre 1 y 2 existe el 1.1, 1.2, 1.3 y así sucesivamente hasta llegar a 2, pero entre el 1.1 y el 1.2 existe el 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 hasta llegar a 1.2; al interior de cada valor existen infinidad de valores y así hasta el infinito. Por su naturaleza esta variable tiene distribución normal lo cual implica que es posible calcular medidas de tendencia central (media mediana y moda) y medidas de dispersión (varianza y desviación estándar).
- **Variable discreta.** Se mide en valores numéricos y entre cada valor no existe ningún otro valor. Ejemplo de ello es el número de hijos, en este caso las posibilidades podrían ser 0, 1, 2 y 3, pero a diferencia de la variable continua, entre el 2 y el 3 no existe ningún otro valor posible cuando se miden en el individuo; no obstante, cuando la evaluación se realiza a nivel de la muestra o de la población el comportamiento de la variable se modifica y entonces es posible decir que el promedio de hijos en la población es 2.10. Teóricamente en una variable discreta el tipo de distribución corresponde a Poisson, sin embargo en la práctica, las variables discretas se analizan como si el tipo de distribución correspondiera a normal. En ellas aplican las medidas de tendencia central (media, mediana y moda) y las medidas de dispersión (desviación estándar y varianza).

VARIABLES CUALITATIVAS

Es menester aclarar que en este escrito la definición de variable cualitativa no implica que la investigación se sitúe en el terreno cualitativo; la investigación cualitativa obedece a postulados que la ubican más cercana a la investigación formal que a la investigación fáctica.

Con este referente, se debe decir que las variables cualitativas no se miden numéricamente, en ellas la característica o cualidad evaluada se expresa como tal. Estas variables se dividen en variables ordinales y variables nominales.

- a. **Variable ordinal.** No se expresa numéricamente, en ella se identifican categorías que poseen un orden lógico y jerárquico. Ejemplo de variable ordinal es la escolaridad cuando se mide en grado máximo de estudios (si se mide en años cursados la variable corresponde a escala discreta y por lo tanto queda fuera del grupo de variables cualitativas); en este caso, secundaria tiene mayor peso que primaria y preparatoria tiene mayor peso que secundaria, y así sucesivamente. Otros ejemplos son la calidad de la atención (mala, regular y buena) o el nivel de satisfacción (nada satisfecho, poco satisfecho, regularmente satisfecho, muy satisfecho). En todos los casos existe un orden jerárquico.
- b. **Variable nominal.** No se expresa numéricamente, se identifican categorías que no poseen un orden jerárquico. Ejemplo de este tipo de variable es el género (mujer, hombre), la ocupación (campesino, obrero, empleado, administrativo) y el tipo de comorbilidad (diabetes mellitus, hipertensión arterial, dislipidemia). Claro que se podría disertar al respecto y llegar a la conclusión que tener una u otra comorbilidad o que el tipo de ocupación tiene mayor o menor peso, pero esto implica involucrarse en juicios de valor que no son motivo de análisis en este momento.

Se debe estar cierto que en función de cómo se mida la variable podría pertenecer a cualquiera de las categorías descritas y ser correcto, esto dependerá de la forma en la que se operacionalice. Por ejemplo, la naturaleza de la variable edad la ubica en el grupo de las variables continuas porque entre cada valor existe infinidad de valores, sin embargo, si la operacionalización se realiza en años, o en meses, o en semanas, o en días, o en horas, sin identificar más valores que el señalado, entonces la variable pertenece al grupo de variables discretas, y más aún, si se operacionaliza-

za como unidad de medida los lustros o decenios, entonces se identifica como una variable ordinal.

De igual forma, la naturaleza de la variable número de hijos corresponde a una variable discreta, y si se operacionaliza como tal permanecerá en ese grupo, pero si el número de hijos se operacionaliza en grupos, ninguno, uno y dos, o más, entonces la variable se ubica en el terreno de las variables ordinales.

En este contexto, una variable operacionalizada como continua se puede transformar a una discreta u ordinal; de igual forma una variable operacionalizada como discreta se puede transformar en ordinal pero no en continua, y una variable operacionalizada como ordinal no se puede transformar en discreta, ni en continua; escenario que recomienda que al momento de medir la variable (continua o discreta) se mida como tal, de acuerdo a su naturaleza, para que posteriormente, durante el análisis se esté en la posibilidad de transformarla a otra escala.

TIPOS DE DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

El tipo de variable y el comportamiento de la variable determinan el tipo de distribución de la muestra; este, permite estimar la probabilidad de ocurrencia del fenómeno de estudio, aspecto trascendente en investigación al abordar la inferencia estadística en el mundo de las probabilidades.

La probabilidad de ocurrencia de un evento se puede predecir *a priori* o *a posteriori*. En el escenario *a priori* se conoce con antelación la probabilidad de ocurrencia del evento, ejemplo de ello es la probabilidad de tener el número 2 al lanzar el dado, en este caso es $1/6$ o 0.1667 ; de igual forma, la probabilidad de obtener el as de oros en la baraja española es $1/48$ o 0.0208 .

Cuando se realiza investigación en el escenario *a posteriori*, la probabilidad de ocurrencia del evento se conoce hasta que el evento ha sucedido, pero aun en ese escenario, en un mundo probable la confiabilidad o falibilidad del evento se estima con cierto grado de certeza; planteamiento que implica entrar al terreno del tipo de distribución de la muestra.

Los tipos de distribución muestral son diversos, entre ellos la distribución normal y la binomial, pero es extensivo a la distribución de t , chi cuadrada, Wilcoxon, Mann-Whitney y tantos como pruebas estadísticas existan.

TÉCNICAS DE CONTEO

CONCEPTO

Las técnicas de conteo son herramientas útiles para determinar el número total de posibilidades. Tienen aplicación práctica en el escenario de la distribución binomial, y entre ellas se incluyen factoriales, permutaciones y combinaciones.

Factoriales

Factorial se define como el producto de todos los números desde “n” hasta 1, y se expresa como n!

Esto significa que si se pretende conocer el factorial de 4, se debe multiplicar 4, por 3, por 2 y por 1, el producto obtenido es el factorial del número original

$$4! = (4) (3) (2) (1) = 24$$

Cuando se pretende calcular el factorial de cero, el resultado por definición es igual a 1.

$$0! = 1$$

Ejercicio

$$9! = (9) (8) (7) (6) (5) (4) (3) (2) (1) = 362,880$$

En la medida en que el número se incrementa el resultado también se incrementa. Por ejemplo, el factorial de 20 es 2,432,902,008,176,640,000

$$20! = (20)(19)(18)(17)(16)(15)(14)(13)(12)(11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1) = 2,432,902,008,176,640,000$$

Permutaciones

La permutación es otra técnica de conteo, en ella se estima el número posible de arreglos ordenados “resultado esperado”, en un determinado número de eventos “n”, asumiendo un número determinado de éxitos “x”. Se expresa de la siguiente manera

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

Ejercicio

Se desea saber cuántos posibles arreglos ordenados se pueden obtener en un grupo de 5 alumnos si se espera que exactamente 2 resulten aprobados.

$${}_n P_x = \frac{n!}{(n-x)!}$$

$${}_5 P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)} = \frac{120}{6} = 20$$

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1a | 1b | 0c | 0d | 0e |
| | 0b | 1c | 0d | 0e |
| | 0b | 0c | 1d | 0e |
| | 0b | 0c | 0d | 1e |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1b | 1a | 0c | 0d | 0e |
| | 0a | 1c | 0d | 0e |
| | 0a | 0c | 1d | 0e |
| | 0a | 0c | 0d | 1e |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1c | 1a | 0b | 0d | 0e |
| | 0a | 1b | 0d | 0e |
| | 0a | 0b | 1d | 0e |
| | 0a | 0b | 0d | 1e |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1d | 1a | 0b | 0c | 0e |
| | 0a | 1b | 0c | 0e |
| | 0a | 0b | 1c | 0e |
| | 0a | 0b | 0c | 1e |

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1e | 1a | 0b | 0c | 0d |
| | 0a | 1b | 0c | 0d |
| | 0a | 0b | 1c | 0d |
| | 0a | 0b | 0c | 1d |

En este cuadro los sujetos son el individuo “a”, “b”, “c”, “d” y “e”, el número “1” significa ser aprobado y el número “0” significa que no ha sido aprobado. En cada una de las veinte combinaciones ordenadas existen dos sujetos que han sido aprobados (“1”).

Combinaciones

La combinación también es una técnica de conteo en la cual se estima el número posible de arreglos no ordenados “resultado esperado”, en un determinado número de eventos “n”, asumiendo un número determinado de éxitos “x”. Se expresa de la siguiente manera

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Ejercicio

Se desea saber cuántos posibles arreglos no ordenados se pueden obtener en un grupo de 5 alumnos si se espera que 2 resulten aprobados.

$$nC_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$${}^5C_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)(3)(2)(1)} = \frac{120}{12} = 10$$

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 1a | 1b | 0c | 0d | 0e |
| 1a | 0b | 1c | 0d | 0e |
| 1a | 0b | 0c | 1d | 0e |
| 1a | 0b | 0c | 0d | 1e |
| 0a | 1b | 0c | 0d | 1e |
| 0a | 0b | 1c | 0d | 1e |
| 0a | 0b | 0c | 1d | 1e |
| 0a | 1b | 1c | 0d | 0e |
| 0a | 0b | 1c | 1d | 0e |
| 0a | 1b | 0c | 1d | 0e |

En este cuadro los sujetos son el individuo “a”, “b”, “c”, “d” y “e”, el número “1” significa ser elegido (aprobado) y el número “0” significa que no ha sido elegido (reprobado). En cada una de las diez combinaciones no ordenadas existen dos sujetos que han sido elegidos (aprobados).

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

CONCEPTO

La distribución binomial junto con la distribución normal son las más utilizadas. En la distribución binomial puede ocurrir uno de dos eventos posibles que son mutuamente excluyentes, lo cual significa que si ocurre uno de los eventos el otro ya no puede ocurrir.

Los eventos reciben el nombre de éxito y fracaso, pero el concepto de éxito y fracaso es relativo porque el calificativo se asigna en función de lo que se espera que suceda.

Cuando la medición se realiza en el sujeto de estudio el éxito se identifica con el número 1 y se le asigna la letra “p”, y el fracaso se identifica con el número 0 y se le asigna la letra “q”.

Cuando la medición se hace en la muestra el valor mínimo posible es “0” y el valor máximo posible es “1”, y entre estos dos valores existe infinidad de valores; en este caso el éxito puede tener cualquier valor entre 0 y 1 y se sigue representando con la letra “p” y el valor se obtiene del análisis de la muestra, y el fracaso se sigue representando con la letra “q” y se calcula con la fórmula “ $q=1-p$ ” de tal suerte que la suma de “p” y “q” siempre es igual a 1.

CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE OCURRENCIA DE UN EVENTO

Cuando se desea calcular la probabilidad de ocurrencia de un evento en el momento actual para una función determinada “ $f(x)$ ”, empleando como referencia el comportamiento pasado de eventos similares o la probabilidad encontrada en la muestra estudiada, se asocia el total de combinaciones posibles de éxito “x” en un determinado número de eventos

“n”, (nCx); con la probabilidad de ocurrencia del suceso encontrada en la muestra estudiada o lo reportado en el pasado “p” elevado al total de éxitos esperados “x” (p^x), y multiplicado por la probabilidad de no ocurrencia del evento “q” elevado al número de eventos “n” menos el total de éxitos esperados “x” (q^{n-x}).

La fórmula empleada es

$$f(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

Ejercicio

En el primer examen parcial del curso de Maestría en Salud Pública, el 48% de los alumnos obtuvieron calificación de 10. ¿Cuál es la probabilidad de que de los 4 alumnos inscritos, exactamente 2 obtengan calificación de 10 en el segundo examen parcial?

$$f(x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$$

$$x = 2; n = 4; p = 0.48; q = 1 - 0.48 = 0.52$$

Escriba aquí la ecuación

$$f(2) = ({}_4 C_2)(0.48^2)(0.52^{4-2}) = (6)(0.2304)(0.2704) = 0.3738$$

La probabilidad de que exactamente 2 obtengan calificación de 10 es 0.3738.

Ejercicio

Con esta misma información se desea saber cuál es la probabilidad de que exactamente 0 o 1 o 2 o 3 o 4 obtengan calificación de 10; y cuál es la probabilidad de que 0, 1, 2, 3, y 4 obtengan calificación de 10.

| Función | ${}_n C_x$ | p^x | q^{n-x} | Probabilidad | |
|-----------------------------------|------------|--------|-----------|--------------|--|
| $f(0) = {}_4 C_0 p^0 q^{4-0} = 1$ | 1 | 1.0000 | 0.0731 | = 0.0731 | Probabilidad de que exactamente 0 obtenga calificación de 10 |
| $f(1) = {}_4 C_1 p^1 q^{4-1} = 4$ | 4 | 0.4800 | 0.1406 | = 0.2700 | Probabilidad de que exactamente 1 obtenga calificación de 10 |

| Función | ${}_n C_x$ | p^x | q^{n-x} | Probabilidad | |
|-------------------------------|------------|--------|-----------|--------------|--|
| $f(2) = {}_4 C_2 p^2 q^{4-2}$ | = 6 | 0.2304 | 0.2704 | = 0.3738 | Probabilidad de que exactamente 2 obtengan calificación de 10 |
| $f(3) = {}_4 C_3 p^3 q^{4-3}$ | = 4 | 0.1106 | 0.5200 | = 0.2300 | Probabilidad de que exactamente 3 obtengan calificación de 10 |
| $f(4) = {}_4 C_4 p^4 q^{4-4}$ | = 1 | 0.0531 | 1.0000 | = 0.0531 | Probabilidad de que exactamente 4 obtengan calificación de 10 |
| | | | | 1.0000 | Probabilidad de que exactamente 0, 1, 2, 3 y 4 obtengan calificación de 10 |

La probabilidad de que 1 y 2 obtengan calificación de 10 se estima con la suma de las probabilidades individuales, es decir $0.2700 + 0.3738 = 0.6438$.

La probabilidad de que 1 y 4 obtengan calificación de 10 corresponde a la suma de $0.2700 + 0.0531 = 0.3231$.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL Y MEDIDAS DE DISPERSIÓN

CONCEPTO

Las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión son estimadores puntuales, en primera instancia empleados para describir las características de la muestra estudiada, y en un segundo momento se incorporan a la prueba estadística para determinar la significancia estadística. Son utilizadas cuando las variables analizadas se encuentran en escala continua o en escala discreta y, aunado a ello, como requisito indispensable, el tipo de distribución debe ser normal.

En relación con las variables discretas se debe señalar que teóricamente el tipo de distribución corresponde a Poisson, pero en la práctica se aplican las mismas pruebas estadísticas descriptivas e inferenciales empleadas en el análisis de las variables continuas. Este es tema de discusión en otro momento.

Se ha señalado que en tamaños de muestra grandes la probabilidad de encontrar distribución normal es alta, de igual forma se ha señalado que en tamaños de muestra pequeños la probabilidad de encontrar distribución normal es baja. Pero solo es una probabilidad, en la práctica se pueden encontrar tamaños de muestra pequeños con distribución normal y tamaños de muestra grandes sin distribución normal.

Ante este escenario dos preguntas surgen. ¿Cuándo un tamaño de muestra se considera grande? Al respecto la teoría dice que una muestra con más de 30 observaciones se considera muestra grande, sin embargo, se debe reflexionar si esta aseveración aplica solo para muestras en las cuales se tienen controladas el resto de las variables del fenómeno de

estudio, como en la investigación de laboratorio, y si aplica para muestras obtenidas de contextos epidemiológicos en donde la característica es la diversidad. La segunda interrogante se plantea en función del ¿qué hacer si no existe la certeza de la distribución normal aun en muestras grandes o pequeñas? Ante este panorama el Investigador siempre está obligado a demostrar la normalidad y para ello realizar la prueba de normalidad. Según Shapiro Wilk, *cuando la muestra estudiada es menor de 50 observaciones*, y Kolmogorov Smirnov, *cuando la muestra es de 50 observaciones o más*.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Las medidas de tendencia central, como su nombre indica, son aquellas que se ubican en el centro de la distribución. Incluyen la moda, mediana y media (promedio).

Moda

La moda corresponde al valor que con mayor frecuencia se repite. Pueden existir muestras con una sola moda, muestras bimodales, muestras trimodales o muestras sin moda.

Ejemplo

La hemoglobina glucosilada de una muestra de pacientes con diabetes mellitus se presenta a continuación. Determinar la moda de cada muestra.

| Hemoglobina glucosilada | | | |
|-------------------------|-------------------|-----------------------|-----------|
| Muestra 1 | Muestra 2 | Muestra 3 | Muestra 4 |
| 7 | 7 | 7 | 7 |
| 6 | 6 | 6 | 6 |
| 9 | 9 | 9 | 9 |
| 6 | 6 | 6 | 6 |
| 13 | 13 | 13 | 13 |
| | 13 | 13 | 13 |
| | | 7 | 7 |
| | | | 9 |
| Unimodal 6 | Bimodal 6 y 13 | Trimodal 6, 7 y 13 | Sin moda |

En la primera muestra se identifica una sola moda y corresponde a 6, la segunda muestra corresponde a bimodal con 6 y 13, la tercera muestra se trata de una trimodal con 6, 7 y 13. En la cuarta muestra no existe moda.

Mediana

La mediana se define como el valor que se ubica en el centro después de ordenar los valores de menor a mayor o de mayor a menor. Cuando el número de observaciones de la muestra es impar, la mediana es el número que aparece exactamente al centro del listado. Cuando el total de observaciones de la muestra es par, se identifican los dos valores ubicados en el centro, se suman y se dividen entre dos; el resultado corresponde a la mediana.

Ejemplo

Utilizando la información previa, determinar la mediana en cada caso.

| Hemoglobina glucosilada | | | |
|-------------------------|------------------------|--------------|------------------------|
| Muestra 1 | Muestra 2 | Muestra 3 | Muestra 4 |
| 6 | 6 | 6 | 6 |
| 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 7 | 7 | 7 |
| 9 | 9 | 7 | 7 |
| 13 | 13 | 9 | 9 |
| | 13 | 13 | 9 |
| | | 13 | 13 |
| | | | 13 |
| | | | |
| Mediana 7 | Mediana $(7+9)/2=8$ | Mediana 7 | Mediana $(7+9)/2=8$ |

En la primera y tercera muestra la mediana se identifica directamente al observar el valor que se ubica en el centro y corresponde a 7; en la segunda y cuarta muestra, por tratarse de un número par de observaciones, se suman los dos valores centrales y se dividen entre dos, en estos casos la mediana corresponde a 8.

Media (promedio)

La media (promedio) se define como la suma (Σ) de todos los valores (X_i), desde el primero ($i=1$) hasta el último (k), dividido entre el total de observaciones (n).

$$\tilde{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{n}$$

Ejemplo

Utilizando la información de la primera muestra, estimar la media (promedio).

| Hemoglobina glucosilada |
|-------------------------|
| 6 |
| 6 |
| 7 |
| 9 |
| 13 |

$$\tilde{x} = \frac{6+6+7+9+13}{5} = \frac{41}{5} = 8.20$$

La media de esta muestra es 8.20.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Las medidas de dispersión establecen qué tanto se alejan los datos del punto central de la muestra, se dividen en varianza y desviación estándar. La importancia de las medidas de dispersión se encuentra en la significancia estadística al utilizar pruebas paramétricas inferenciales.

Cuando la varianza o la desviación estándar son muy pequeñas, el valor del estadístico calculado se incrementa y el valor de p disminuye; con ello aumenta la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera y aumenta la probabilidad de cometer el error tipo I.

Por el contrario, si las medidas de dispersión son muy grandes, el valor del estadístico calculado disminuye y el valor de p se incrementa; con ello aumenta la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando es falsa y aumenta la probabilidad de cometer el error tipo II.

| Desviación estándar Varianza | Valor del estadístico calculado | Valor de p (significancia) | Hipótesis nula | Tipo de error |
|---------------------------------|---------------------------------|----------------------------|----------------|---------------|
| Pequeña | Grande | Pequeño | Se rechaza | I |
| Grande | Pequeño | Grande | Se acepta | II |

Varianza de la media

La varianza se define como la suma (Σ) de la diferencia elevada al cuadrado de cada valor con respecto a la media ($(x_i - \bar{x})^2$), desde la primera diferencia (i=1) hasta la última diferencia (k), y posteriormente dividida entre el total de observaciones menos uno (n-1). La varianza se identifica con la letra “s²” si se refiere a la muestra y con la letra “ σ^2 ” si se refiere a la varianza de la población.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \tilde{X})^2}{n - 1}$$

Observe que la suma de la diferencia entre cada valor y la media sin elevar al cuadrado tiene por resultado cero, para evitar esto se eleva al cuadrado y por la regla de los signos los valores negativos se convierten en positivos y en consecuencia la suma tiene un valor entero positivo evitando el cero original, y con ello es posible continuar la estimación de la varianza. También se debe estar consciente que el resultado se encuentra en unidades al cuadrado.

Al respecto es necesario definir si la varianza se puede calcular para cualquier estimador de tendencia central, media, mediana y moda, si se acepta, entonces la fórmula es la siguiente.

| Varianza | | |
|--|--|--|
| Media | Mediana | Moda |
| $S_{media}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \tilde{X})^2}{n - 1}$ | $S_{mediana}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - mediana)^2}{n - 1}$ | $S_{moda}^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - moda)^2}{n - 1}$ |

Ejemplo

Utilizando los valores del ejemplo anterior calcular la varianza para la media, para la mediana y para la moda.

Media

$$s^2 = \frac{(6-8.2)+(6-8.2)+(7-8.2)+(9-8.2)+(13-8.2)^2}{5-1} = \frac{34.8}{4} = 8.7$$

Mediana

$$s^2 = \frac{(6-7)+(6-7)+(7-7)+(9-7)+(13-7)^2}{5-1} = \frac{42}{4} = 10.5$$

Moda

$$s^2 = \frac{(6-6)+(6-6)+(7-6)+(9-6)+(13-6)^2}{5-1} = \frac{59}{4} = 14.75$$

Desviación estándar de la media

La desviación estándar se define como la raíz cuadrada de la suma (Σ) de la diferencia elevada al cuadrado de cada valor con respecto a la media ($(x_i - \tilde{x})^2$), desde la primera diferencia ($i=1$) hasta la última diferencia (k), posteriormente se divide entre el total de observaciones menos uno ($n-1$). Se identifica con la letra “s” si se refiere a la muestra y con la letra “ σ ” si se refiere a la desviación estándar de la población.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \tilde{X})^2}{n-1}}$$

La observación en torno a la varianza también aplica para la desviación estándar, si se asume como cierta entonces es posible calcular la desviación estándar de la media, de la mediana y de la moda.

| Desviación estándar | | |
|---|---|---|
| Media | Mediana | Moda |
| $s_{\tilde{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \tilde{X})^2}{n-1}}$ | $s_{mediana} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (X_i - mediana)^2}{n-1}}$ | $s_{moda} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (X_i - moda)^2}{n-1}}$ |

Ejemplo

Utilizando los valores del ejemplo anterior calcular la desviación estándar para la media, la mediana y la moda.

Media

$$s = \sqrt{\frac{(6-8.2)^2 + (6-8.2)^2 + (7-8.2)^2 + (9-8.2)^2 + (13-8.2)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{34.80}{4}} = 2.95$$

Mediana

$$s = \sqrt{\frac{(6-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2 + (13-7)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{42}{4}} = 3.24$$

Moda

$$s = \sqrt{\frac{(6-6)^2 + (6-6)^2 + (7-6)^2 + (9-6)^2 + (13-6)^2}{5-1}} = \sqrt{\frac{59}{4}} = 3.84$$

Finalmente, la desviación estándar es la transformación de la varianza (que se calcula en unidades al cuadrado) a unidades naturales y desde esta perspectiva se podría decir que la varianza es una estrategia para llegar a la desviación estándar.

Error estándar

Cuando se estima cualquier parámetro de tendencia central (media, mediana, moda) en una muestra, el resultado es una aproximación al parámetro verdadero, no necesariamente corresponde al parámetro verdadero.

El error estándar lo que identifica es la diferencia que existe entre el parámetro verdadero y el parámetro estimado (media, mediana o moda), se reconoce con las letras “se”; el estimador central (media, mediana o moda) que tenga el menor error estándar será el mejor estimador puntual de tendencia central.

La fórmula del error estándar corresponde a la desviación estándar de cada estimador de tendencia central dividido entre la raíz cuadrada del total de observaciones.

$$se = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

El error estándar se calcula para cada uno de los estimadores de tendencia central, media, mediana y moda, empleando en cada caso la desviación estándar correspondiente.

Error estándar para la media

$$se = \frac{S_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

Error estándar para la mediana

$$se_{mediana} = \frac{S_{mediana}}{\sqrt{n}}$$

Error estándar para la moda

$$se_{moda} = \frac{S_{moda}}{\sqrt{n}}$$

Ejemplo.

Con la información utilizada calcular el error estándar para la media, mediana y moda.

Error estándar para la media

$$se_{\bar{x}} = \frac{2.95}{\sqrt{5}} = 1.32$$

Error estándar para la mediana

$$se_{mediana} = \frac{3.24}{\sqrt{5}} = 1.45$$

Error estándar para la moda

$$se_{moda} = \frac{3.84}{\sqrt{5}} = 1.72$$

En conclusión, si el error estándar con la media es 1.32, con la mediana 1.45, y con la moda 1.72, se puede decir que el mejor estimador puntual de tendencia central es la media ya que es el que tiene el menor error estándar.

En relación a las medidas de dispersión, la desviación estándar se estima en unidades naturales y la varianza en unidades al cuadrado, en consecuencia, cuando se utiliza la media se debe usar la desviación estándar ya que se encuentra en unidades naturales, igual a las unidades en las que se encuentra estimada la media.

En el cuadro se resumen las medidas de tendencia central, las medidas de dispersión y el error estándar

| Hemoglobina glucosilada | | | | |
|-----------------------------|-----------|----------|---------------------|----------------|
| 6 | 6 | 7 | 9 | 13 |
| Medida de tendencia central | Parámetro | Varianza | Desviación estándar | Error Estándar |
| Moda | 6 | 14.75 | 3.84 | 1.72 |
| Mediana | 7 | 10.50 | 3.24 | 1.45 |
| Media (promedio) | 8.20 | 8.70 | 2.95 | 1.32 |