

Circuitos Eléctricos en Régimen Transitorio

**Teoría y problemas resueltos
Volumen II**

Alfonso Bachiller Soler, Ramón Cano González

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

Índice

<i>Índice</i>	III
<i>Nota de los autores</i>	IX
<i>Prólogo</i>	XI
1. Transitorios de primer orden	1
1.1. Introducción	1
1.2. Circuitos de primer orden	2
1.2.1. Circuito RC	3
1.2.2. Circuito RL	4
1.2.3. Ecuación diferencial genérica de un circuito de primer orden	6
1.3. Respuesta transitoria de los circuitos de primer orden	7
1.3.1. Respuesta natural	7
1.3.2. Respuesta forzada o de régimen permanente	9
1.3.3. Respuesta completa	9
1.3.4. Condiciones iniciales	10
1.4. Generalización de la respuesta transitoria	11
1.5. Procedimiento para la obtención de la respuesta de un circuito de primer orden	12
1.6. Casos que provocan impulsos	17
1.6.1. Condensadores en paralelo	17
1.6.2. Bobinas en serie	18
1.7. Modelo de condensador y bobina con condiciones iniciales	20
Problemas resueltos	23
P. 1.1. RC con excitación de continua	23
P. 1.2. RC con excitación de continua	26
P. 1.3. RL sin fuentes de excitación	29
P. 1.4. RC con excitación de continua	33
P. 1.5. RL con excitación de alterna	36

P. 1.6.	RL con excitación de alterna	38
P. 1.7.	RC y RL con excitación de continua	42
P. 1.8.	RL y RC con excitación de continua	45
P. 1.9.	RC. Equivalente Thévenin con excitación de continua	49
P. 1.10.	RL. Equivalente Thévenin con excitación de continua	52
P. 1.11.	RL. Equivalente Thévenin con excitación de continua	55
P. 1.12.	RC. Equivalente Thévenin con excitación de continua	58
P. 1.13.	RC. Condensadores en serie con excitación de continua	61
P. 1.14.	RC. Condensadores en serie con excitación de continua	65
P. 1.15.	RL. Bobinas en paralelo con excitación de continua	69
P. 1.16.	RC. Condensadores en serie y en paralelo sin fuentes de excitación	72
P. 1.17.	RL. Bobinas en paralelo sin fuentes de excitación	76
P. 1.18.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua	80
P. 1.19.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua	85
P. 1.20.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua	89
P. 1.21.	RC. Transitorios concatenados con excitación de continua	93
P. 1.22.	RC. Transitorios concatenados con excitación de continua	97
P. 1.23.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua	100
P. 1.24.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua	103
P. 1.25.	RC. Transitorios concatenados con excitación de continua	106
P. 1.26.	RC. Transitorios concatenados con excitación de continua	109
P. 1.27.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua	113
P. 1.28.	RL. Transitorios concatenados con excitación de alterna	117
P. 1.29.	RL. Transitorios concatenados con excitación de continua y de alterna	121
P. 1.30.	RC. Transitorios concatenados, condensadores en serie con excitación de continua	127
P. 1.31.	RL. Transitorios concatenados, bobinas en paralelo sin fuentes de excitación	132
P. 1.32.	RC. Transitorios concatenados, condensadores en serie con excitación de continua	137
P. 1.33.	RL y RC. Transitorios concatenados con excitación de continua	142
P. 1.34.	RL. Transitorios concatenados, constante de tiempo infinita con excitación de continua	147
P. 1.35.	RL. Bobinas en serie sin fuentes de excitación. Respuesta impulsional	151
P. 1.36.	RC. Condensadores en paralelo sin fuentes de excitación. Respuesta impulsional	154
P. 1.37.	RL. Respuesta impulsional con excitación de continua	157
P. 1.38.	RC. Respuesta impulsional con excitación de continua	161
P. 1.39.	RL. Respuesta impulsional con excitación de continua	165
P. 1.40.	RL. Respuesta impulsional con excitación de continua	169
P. 1.41.	RC. Transitorios concatenados, respuesta impulsional y excitación de continua	171
P. 1.42.	RL. Transitorios concatenados, respuesta impulsional con excitación de continua	176

2. Transitorios de segundo orden 181

2.1.	Circuitos de segundo orden	181
2.1.1.	Circuito RLC serie	182
2.1.2.	Circuito RLC paralelo	185
2.1.3.	Ecuación diferencial genérica de un circuito de segundo orden	188
2.2.	Respuesta transitoria de los circuitos de segundo orden	189
2.2.1.	Respuesta natural	189
2.2.2.	Respuesta forzada o de régimen permanente	191
2.2.3.	Respuesta completa	191
2.2.4.	Condiciones iniciales	192
2.3.	Procedimiento para la obtención de la respuesta de un circuito de segundo orden	194
2.4.	Generalización de la respuesta transitoria de los circuitos de segundo orden	196
Problemas resueltos		199
P. 2.1.	RLC serie. Cálculo de condiciones iniciales	199
P. 2.2.	RLC serie sobreamortiguado sin fuentes de excitación	201
P. 2.3.	RLC serie subamortiguado sin fuentes de excitación	204
P. 2.4.	RLC serie críticamente amortiguado con excitación de continua	208
P. 2.5.	RLC serie sobreamortiguado con excitación de continua	211
P. 2.6.	RLC serie subamortiguado con excitación de continua	214
P. 2.7.	RLC serie subamortiguado con excitación de alterna	217
P. 2.8.	RLC serie sobreamortiguado con excitación de alterna	221
P. 2.9.	RLC paralelo sobreamortiguado sin fuentes de excitación	224
P. 2.10.	RLC paralelo sobreamortiguado con excitación de continua	227
P. 2.11.	RLC paralelo subamortiguado con excitación de continua	231
P. 2.12.	RLC paralelo sobreamortiguado con excitación de alterna	236
P. 2.13.	RLC paralelo subamortiguado con excitación de continua	239
P. 2.14.	RLC paralelo críticamente amortiguado con excitación de alterna	242
P. 2.15.	RLC serie subamortiguado con equivalente Thévenin de continua	246
P. 2.16.	RLC sin amortiguamiento y sin fuentes de excitación	251
P. 2.17.	RLC serie críticamente amortiguado con equivalente Thévenin de continua	255
P. 2.18.	RLC paralelo sobreamortiguado con equivalente Thévenin de continua	258
P. 2.19.	RLC paralelo sin amortiguamiento y RC con excitación de continua	262
P. 2.20.	RLC paralelo subamortiguado con excitación de continua y RLC sin amortiguamiento. Transitorios concatenados	266
P. 2.21.	RLC serie sobreamortiguado con excitación de continua y respuesta impulsional	273
P. 2.22.	RLC paralelo subamortiguado con excitación de continua y respuesta impulsional	276
P. 2.23.	RLC paralelo subamortiguado con excitación de continua y respuesta impulsional	281
3. Transformada de Laplace		287
3.1.	Introducción	287
3.2.	Definición	287

3.3.	Principales propiedades y teoremas	288
3.4.	Transformada de Laplace de las funciones más usuales	289
3.5.	Aplicación al análisis de circuitos eléctricos	289
3.5.1.	Introducción	289
3.5.2.	Relación tensión-intensidad en el dominio s	290
	Resistencia	290
	Bobina	291
	Condensador	292
	Fuentes independientes	294
	Fuentes dependientes	294
	Bobinas acopladas	295
3.5.3.	Impedancia y admitancia	296
3.5.4.	Leyes de Kirchhoff	296
3.5.5.	Metodología de resolución	297
3.6.	Transformada inversa de Laplace	299
3.6.1.	Metodología de cálculo de la transformada inversa de Laplace	300
3.6.2.	Polos reales simples, $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_m$	300
3.6.3.	Polo real múltiple	301
3.6.4.	Polo complejo conjugado	302
	Problemas resueltos	305
P. 3.1.	Segundo orden subamortiguado con excitación de continua	305
P. 3.2.	Segundo orden subamortiguado con excitación de continua	307
P. 3.3.	Primer orden con excitación de continua y respuesta impulsional	309
P. 3.4.	Segundo orden sobreamortiguado con excitación de continua	311
P. 3.5.	Segundo orden subamortiguado con excitación de continua	314
P. 3.6.	Segundo orden sobreamortiguado con excitación de continua	316
P. 3.7.	Primer orden con excitación de continua y con excitación tipo lineal	317
P. 3.8.	Primer orden con excitación de alterna y respuesta impulsional	320
P. 3.9.	Primer orden con excitación de alterna	323
P. 3.10.	Primer orden con excitación de alterna	325
P. 3.11.	Condensadores en paralelo. Respuesta impulsional	327
P. 3.12.	Segundo orden sobreamortiguado con excitación de continua	330
P. 3.13.	Segundo orden subamortiguado con excitación de continua	332
P. 3.14.	Segundo orden sobreamortiguado con excitación de alterna	333
P. 3.15.	Bobinas acopladas	335
P. 3.16.	Segundo orden con excitación impulsional	337
P. 3.17.	Segundo orden sobreamortiguado con excitación de continua	339
P. 3.18.	Segundo orden con excitación impulsional	341
P. 3.19.	Segundo orden subamortiguado con excitación de continua	345
P. 3.20.	Primer orden con fuente dependiente y excitación de continua	348
P. 3.21.	Segundo orden sin fuentes de excitación	350

P. 3.22.	Primer orden con excitación exponencial	352
P. 3.23.	Primer orden con excitación impulsional	355
P. 3.24.	Bobinas acopladas	356

Nota de los autores

Una vez consolidado el primer volumen de *Circuitos Eléctricos en Régimen Transitorio. Teoría y Problemas Resueltos*, es muy grato ofrecer al lector este segundo volumen con más problemas resueltos. Hemos querido mantener la misma estructura que el primer volumen y, además, nuestro empeño ha sido que ambos se pudieran trabajar de forma independiente, sin necesitar el uno del otro. Para ello, no ha habido más remedio que incorporar de nuevo la parte teórica aún siendo conscientes que es exactamente la misma que la del primer volumen.

Se ha puesto especial empeño en la representación de forma gráfica de aquellos resultados que hemos considerado como más destacables para motivar al lector a que adquiera el hábito de representar gráficamente los resultados teóricos obtenidos en este tipo de problemas de análisis transitorio.

En cuanto a las unidades de las diferentes magnitudes que se usan en los problemas, hemos intentado equilibrar la rigurosidad y la claridad del texto. Somos conscientes que las unidades son fundamentales en cualquier problema de Ingeniería pero también entendemos que, durante la resolución de un problema, se puede obviar su indicación en muchas situaciones. En particular, los problemas de la transformada de Laplace, se ha mantenido el criterio de solamente indicar las unidades en las magnitudes finales para así evitar desviar la atención del lector.

Los autores

Prólogo

El lector interesado en el análisis de los circuitos eléctricos se encuentra con una cantidad ingente de obras en la literatura especializada que abordan esta temática, la mayoría de las cuales dedican habitualmente uno o dos capítulos al régimen transitorio de circuitos. Es pues este libro singular y de especial interés, al ser su eje principal el estudio teórico y práctico de transitorios que resulta esencial en sí mismo y como preludio ineludible del régimen permanente.

Ya en el prólogo del primer volumen de esta obra se pone de manifiesto la relevancia del estudio de los regímenes dinámicos de los circuitos eléctricos y electrónicos, motivando muy acertadamente al lector que busca profundizar en esta área de estudio de los circuitos. Con objeto de enfatizar aún más la importancia del estudio del régimen transitorio en circuitos eléctricos, es interesante recordar algunas temáticas de la ingeniería eléctrica donde este estudio es de especial relevancia, ya sea en tareas de diseño, modelado, planificación o de operación de la red eléctrica. Es, por ejemplo, el caso de estudio de la posible actuación errónea de aparataje de protección y corte durante el transitorio por faltas espurias, o el de los transitorios que surgen en la conexión y desconexión de condensadores a las redes eléctricas. Muy importante también es el fenómeno de resonancia interna en transformadores, o los transitorios a generar y estudiar cuando se desea cuantificar la inductancia y capacitancia de la bobina de un transformador, entre otros muchos que se podrían nombrar. La comprensión de todos estos fenómenos y comportamientos requiere de una adecuada asimilación de los fenómenos transitorios en circuitos lineales básicos, paso ineludible para su aplicación a casos prácticos que el ingeniero, eminentemente eléctrico, habrá de acometer.

Por su parte, en este segundo volumen se aborda, al igual que el primero, el estudio teórico y práctico de transitorios en circuitos lineales de primer y segundo orden, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de Laplace. Destaca esta segunda obra por la gran variedad de ejemplos prácticos que incluye, estando presentes en los mismos numerosos componentes habituales de los circuitos eléctricos: por supuesto resistencias, bobinas y condensadores, pero también fuentes dependientes, bobinas acopladas e interruptores que modifican la topología y conectividad de los circuitos. Se aborda el análisis cuando las excitaciones al circuito son tanto fuentes de continua como de alterna, los dos grandes

tipos dominantes de señales eléctricas, si bien se incluyen también otras excitaciones como las de tipo impulso, estas últimas de gran relevancia en numerosos casos prácticos. Las representaciones gráficas incluidas en la obra enriquecen de forma notable los ejemplos estudiados, facilitando al lector la comprensión de los regímenes dinámicos.

Los autores de esta obra, Alfonso Bachiller y Ramón Cano, son Doctores Ingenieros Industriales que desarrollan su actividad en el Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla desde hace más de 20 años. Su profundo conocimiento de los circuitos eléctricos no se limita a su dilatada experiencia adquirida en el desarrollo de sus actividades docentes, pues sus relevantes contribuciones en investigación y transferencia tecnológica a la industria pivotan en torno a los regímenes transitorios de circuitos eléctricos. Toda esta experiencia respalda la tarea aquí acometida, que constituye sin lugar a dudas una obra seria, rigurosa y de gran valor formativo para los ingenieros y profesionales que lidien en su quehacer diario con circuitos eléctricos.

Esther Romero Ramos
Catedrática de Universidad
Dpto. Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2 de marzo de 2023

Transitorios de primer orden

1.1. Introducción

En los circuitos cuyos elementos pasivos son únicamente resistencias, las tensiones e intensidades responden de forma inmediata a la evolución de las fuentes de excitación. En este tipo de circuitos, conocidos como circuitos estáticos, las tensiones e intensidades de los elementos vienen dadas por ecuaciones algebraicas y cada instante puede ser analizado sin tener en cuenta los instantes anteriores. Esto no es así en los circuitos que contienen elementos almacenadores de energía, bobinas o condensadores, en los que la relación entre tensión e intensidad viene definida por una ecuación diferencial que hace que la respuesta del circuito sea dinámica. En este tipo de circuitos, denominados circuitos dinámicos, para determinar la respuesta en un instante cualquiera es necesario conocer la evolución anterior de la misma.

En los circuitos dinámicos excitados con fuentes de continua o de alterna, una vez que ha transcurrido un cierto tiempo (régimen transitorio) se alcanza el denominado régimen permanente, donde la respuesta se estabiliza en un valor constante o bien se repite periódicamente, según la excitación sea de continua o alterna, respectivamente. A modo de ejemplo, en la Figura 1.1 y Figura 1.2 se ha representado la respuesta de un circuito RC cuando se excita con una fuente de tensión continua y fuente de tensión alterna respectivamente. En ellas puede observarse cómo, tras el régimen transitorio, se alcanza el régimen permanente.

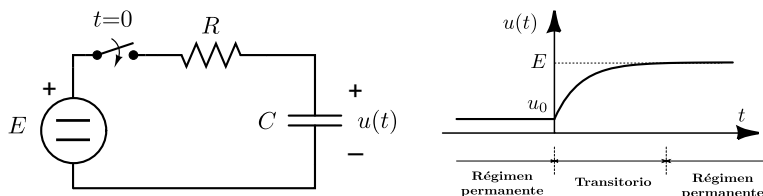


Figura 1.1. Conexión de un circuito RC a una fuente de corriente continua.

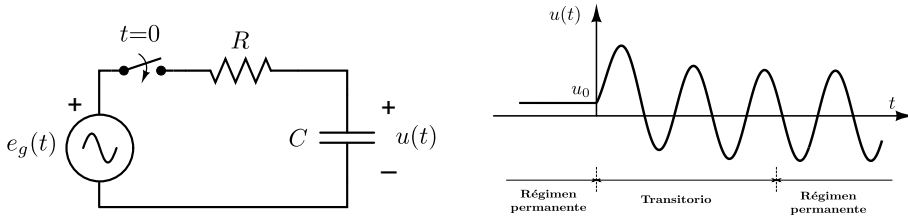


Figura 1.2. Conexión de un circuito RC a una fuente de corriente alterna.

En general, la transición de un régimen permanente a otro diferente involucra un periodo transitorio. Estos procesos transitorios pueden tener su origen en diversas acciones, entre las que destaca la apertura y cierre de interruptores, cortocircuitos o cualquier otra variación de la topología o de los parámetros del circuito.

1.2. Circuitos de primer orden

Los circuitos de primer orden son aquellos en los que cualquier tensión o intensidad se obtiene a partir de una ecuación diferencial de primer orden. En general, son de primer orden:

- Los circuitos en los que solamente existe un único elemento almacenador de energía eléctrica: bobina o condensador, Figura 1.3.

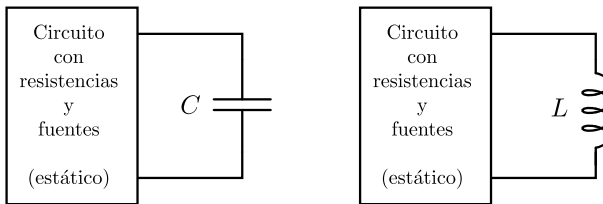


Figura 1.3. Circuitos de primer orden con un único elemento almacenador de energía.

- Los circuitos en los que existiendo varios elementos almacenadores de energía del mismo tipo se pueden transformar en uno solo equivalente, Figura 1.4 y Figura 1.5.

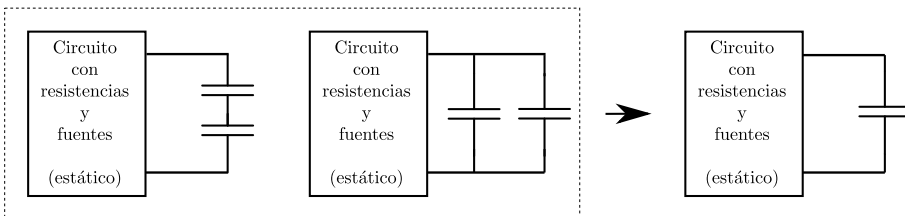


Figura 1.4. Circuito con dos condensadores conectados en serie y en paralelo.

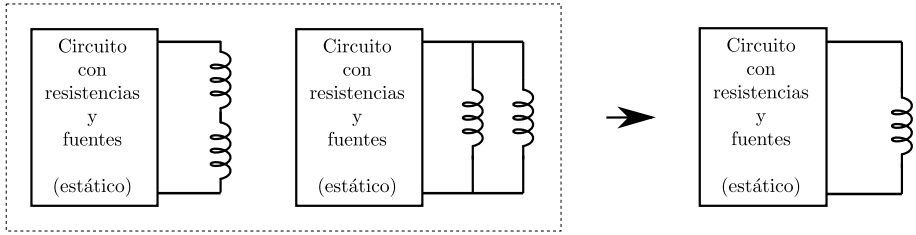


Figura 1.5. Circuito con dos bobinas conectadas en serie y en paralelo.

1.2.1. Circuito RC

En primer lugar se considerarán los circuitos de primer orden en los que solo existe un condensador o varios que pueden sustituirse por un único equivalente. Al existir un único condensador, el resto del circuito estará formado por fuentes y resistencias, pudiendo ser sustituido por su equivalente de Thévenin, como se muestra en la Figura 1.6. De esta forma, el estudio del circuito RC serie, excitado por una fuente de tensión, engloba a todos los circuitos de primer orden cuyo elemento almacenador es un condensador.

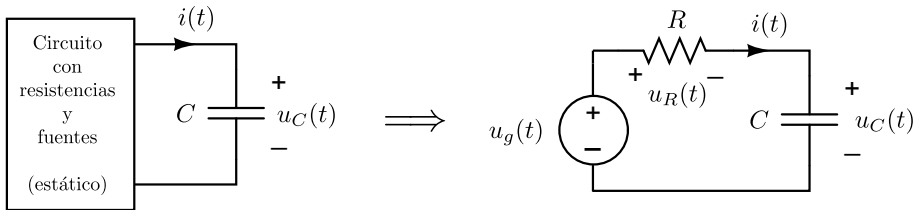


Figura 1.6. Circuito RC y su equivalente Thévenin.

A continuación se obtendrá la ecuación diferencial que define el comportamiento de las distintas variables del circuito de la Figura 1.6.

Ecuación diferencial de la tensión del condensador

Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones:

$$u_C(t) + u_R(t) = u_g(t) \tag{1.1}$$

Teniendo en cuenta la ley de Ohm en la resistencia:

$$u_C(t) + R \cdot i(t) = u_g(t) \tag{1.2}$$

Usando la ecuación de definición del condensador

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} \tag{1.3}$$

y tras ordenar términos, resulta:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{u_g(t)}{RC} \quad (1.4)$$

Ecuación diferencial de la intensidad

Derivando la ecuación (1.2) se obtiene:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + R\frac{di(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \quad (1.5)$$

Usando la ecuación de definición del condensador (1.3)

$$\frac{i(t)}{C} + R\frac{di(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \quad (1.6)$$

y reordenando términos, se llega a:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{1}{R}\frac{du_g(t)}{dt} \quad (1.7)$$

Ecuación diferencial de la tensión en la resistencia

Si se deriva la ecuación (1.1):

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \quad (1.8)$$

y usando la ecuación de definición del condensador (1.3), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{i(t)}{C} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \quad (1.9)$$

Finalmente, aplicando la ley de Ohm en la resistencia y ordenando términos, se tiene que:

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_R(t) = \frac{du_g(t)}{dt} \quad (1.10)$$

Observando las ecuaciones diferenciales obtenidas para cada una de las variables, (1.4), (1.7) y (1.10), puede comprobarse que todas ellas poseen los mismos coeficientes y solo difieren en el término independiente.

1.2.2. Circuito RL

Se consideran ahora los circuitos de primer orden que poseen una bobina o varias que pueden ser agrupadas en una sola equivalente. El resto del circuito estará formado exclusivamente por fuentes y resistencias, no existiendo más elementos almacenadores de energía. Este parte del circuito puede ser sustituido por su equivalente de Norton, que estará formado por una fuente de intensidad en paralelo con una resistencia, como se muestra en la Figura 1.7.

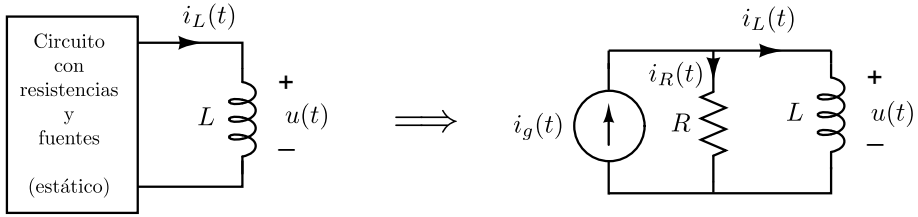


Figura 1.7. Circuito RL y su equivalente Norton.

A continuación se obtendrá la ecuación diferencial que define el comportamiento de las distintas variables del circuito RL paralelo excitado con fuente de intensidad de la Figura 1.7.

Ecuación diferencial de la intensidad por la bobina

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades:

$$i_L(t) + i_R(t) = i_g(t) \tag{1.11}$$

Considerando la ley de Ohm en la resistencia

$$i_L(t) + \frac{u(t)}{R} = i_g(t) \tag{1.12}$$

y teniendo en cuenta la ecuación de definición de la bobina

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \tag{1.13}$$

finalmente resulta, tras reordenar términos:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{R}{L} i_g(t) \tag{1.14}$$

Ecuación diferencial de la tensión del circuito

Derivando la ecuación (1.12) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.15}$$

Usando la ecuación de definición de la bobina (1.13)

$$\frac{u(t)}{L} + \frac{1}{R} \frac{du(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.16}$$

y reordenando términos, se llega a:

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{R}{L} u(t) = R \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.17}$$

Ecuación diferencial de la intensidad por la resistencia

Derivando la ecuación (1.11)

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{di_R(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \quad (1.18)$$

y usando la ecuación de definición de la bobina (1.13), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{u(t)}{L} + \frac{di_R(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \quad (1.19)$$

Finalmente, aplicando la ley de Ohm en la resistencia y después de ordenar los términos, resulta:

$$\frac{di_R(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_R(t) = \frac{di_g(t)}{dt} \quad (1.20)$$

Puede observarse que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales obtenidas para cada una de las variables, (1.14), (1.17) y (1.20), son los mismos en todos los casos y solo difieren en el término independiente. Esto permite escribir una ecuación genérica para todas ellas.

1.2.3. Ecuación diferencial genérica de un circuito de primer orden

En la Figura 1.8 se muestran las ecuaciones diferenciales de todas las variables de los circuitos RC y RL obtenidas en los apartados anteriores.

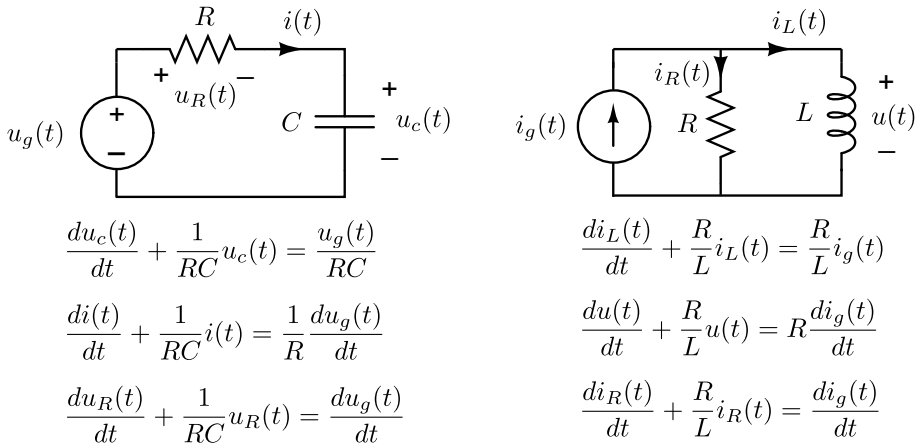


Figura 1.8.

Según la Figura 1.8, puede observarse que todas las ecuaciones pueden expresarse de la forma genérica

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = g(t) \quad (1.21)$$

donde $f(t)$ denota la tensión o intensidad considerada, $g(t)$ es una función relacionada con la fuente excitación del circuito y τ es una constante que depende de los parámetros de los elementos pasivos del circuito. La constante τ se denomina constante de tiempo, y su unidad en el SI es el segundo. Esta constante es característica de cada circuito y su valor es:

- Circuito RC: $\tau=R \cdot C$
- Circuito RL: $\tau=L/R$

Debe tenerse en cuenta que, si en el circuito de primer orden existen varios condensadores que pueden agruparse en uno solo, C representa la capacidad equivalente. Análogamente, L representa el coeficiente de autoinducción de la bobina equivalente. Por último, R es la resistencia equivalente del circuito pasivo visto desde los terminales de L o de C . Por tanto, en el caso más general:

- Circuito RC: $\tau=R_{eq} \cdot C_{eq}$
- Circuito RL: $\tau=L_{eq}/R_{eq}$

1.3. Respuesta transitoria de los circuitos de primer orden

Como se ha expuesto, todas las tensiones e intensidades de los circuitos de primer orden vienen dadas por la ecuación diferencial lineal de primer orden de coeficientes constantes:

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = g(t) \quad (1.22)$$

La solución de esta ecuación servirá para obtener la respuesta transitoria de las distintas variables del circuito. Matemáticamente, la solución general de la ecuación diferencial puede expresarse como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación completa. En los circuitos eléctricos, la solución de la homogénea es conocida como respuesta natural del circuito, mientras que a la solución particular se la conoce como respuesta forzada o de régimen permanente. Por tanto, la solución de la ecuación diferencial (1.22) puede expresarse como

$$f(t) = f_n(t) + f_p(t) \quad (1.23)$$

donde $f_n(t)$ es la respuesta natural del circuito y $f_p(t)$ es la respuesta forzada o de régimen permanente. A continuación se describe cómo determinar cada una de ellas.

1.3.1. Respuesta natural

La respuesta natural se corresponde matemáticamente con la solución de la ecuación diferencial homogénea, es decir, de la ecuación igualada a cero

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0 \quad (1.24)$$

cuya solución, para $t \geq 0$ es:

$$f_n(t) = K \cdot e^{-t/\tau} \quad (1.25)$$

Cabe señalar que en la ecuación homogénea (1.24) no aparece el término $g(t)$, que era el término debido a la fuente de excitación. Por tanto, la solución de esta ecuación es la respuesta de circuito si se anulasen las fuentes de excitación, de ahí que reciba el nombre de respuesta natural del circuito.

La respuesta natural de un circuito de primer orden es una exponencial cuya tasa de decrecimiento viene marcada por el valor de la constante de tiempo, τ . En la Figura 1.9, puede observarse que cuando ha transcurrido un tiempo igual al valor de la constante de tiempo, la respuesta natural se ha reducido de su valor inicial, K , a $0,368K$, es decir, se ha reducido un 63,2 % de su valor inicial. Aunque matemáticamente la respuesta natural no desaparece nunca en el tiempo, en la práctica puede considerarse que cuando el tiempo transcurrido es igual a 5τ , la respuesta natural es despreciable, ya que tiene un valor de solo $0,007K$.

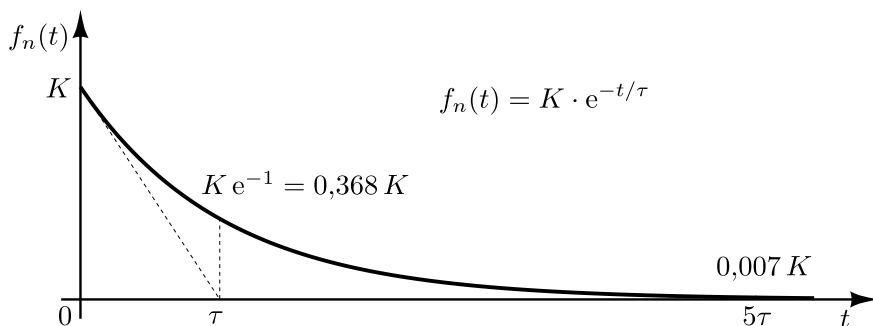


Figura 1.9. Constante de tiempo. Decrecimiento de la respuesta natural.

En la Figura 1.10 puede observarse cómo un mayor valor de la constante tiempo se corresponde con una mayor duración de la respuesta natural.

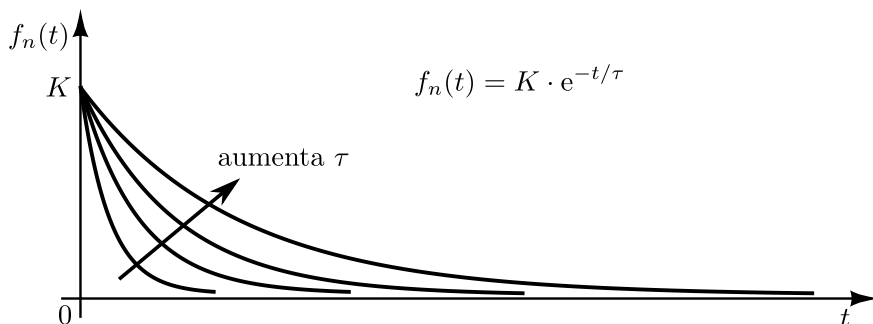


Figura 1.10. Influencia de la constante de tiempo sobre la respuesta natural.

1.3.2. Respuesta forzada o de régimen permanente

La respuesta forzada se corresponde matemáticamente con una solución particular de la ecuación diferencial completa. Esta solución particular es normalmente del mismo tipo que el término independiente $g(t)$, lo que significa que, en este caso, es del mismo tipo que la excitación del circuito. Ya que la respuesta natural tiende a cero, la respuesta forzada es la que permanece en el tiempo, de ahí que en los circuitos eléctricos se le conozca también como respuesta en régimen permanente.

Para obtener una solución particular de una ecuación diferencial de coeficientes constantes pueden utilizarse diferentes métodos matemáticos, como variación de los parámetros y coeficientes indeterminados, entre otros. Sin embargo, para los circuitos eléctricos con excitaciones de continua y de alterna se han estudiado técnicas específicas para la obtención del régimen permanente. Por ello, la respuesta forzada se obtendrá utilizando dichas técnicas.

1.3.3. Respuesta completa

Conocidas la respuesta natural y la respuesta de régimen permanente, la respuesta completa será:

$$f(t) = f_n(t) + f_p(t) = K \cdot e^{-t/\tau} + f_p(t) \quad (1.26)$$

Si se ha obtenido la respuesta en régimen permanente, $f_p(t)$, y se ha determinado la constante de tiempo del circuito, τ , solo queda calcular el valor de la constante K para tener completamente definida la respuesta completa de la variable considerada.

El valor de la constante K se obtiene a partir del valor inicial de la variable, es decir, a partir de $f(0^+)$. Así, en $t=0^+$ se verifica que

$$f(0^+) = K + f_p(0^+) \quad (1.27)$$

de donde

$$K = f(0^+) - f_p(0^+) \quad (1.28)$$

Con lo que finalmente se obtiene lo siguiente:

$$f(t) = f_p(t) + [f(0^+) - f_p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} \quad (1.29)$$

Esta expresión permite obtener la tensión o intensidad de cualquier elemento de un circuito de primer orden, donde:

- $f(t)$ es la variable tensión o intensidad considerada.
- $f_p(t)$ es la respuesta en régimen permanente de dicha variable.
- $f_p(0^+)$ es el valor en $t=0^+$ de la respuesta en régimen permanente.
- τ es la constante de tiempo del circuito.
- $f(0^+)$ es el valor inicial de la variable.

En el apartado siguiente se mostrará cómo calcular $f(0^+)$ en los circuitos de primer orden.

1.3.4. Condiciones iniciales

La transición de un régimen permanente a otro diferente involucra, en general, un periodo transitorio. En este periodo transitorio se produce una redistribución de la energía almacenada en bobinas y condensadores, y un cambio en el estado energético de las fuentes. La redistribución de energía no puede tener lugar instantáneamente, lo que implica que, en ausencia de respuestas de tipo impulsional, se cumple que:

- La tensión en el condensador no puede sufrir discontinuidades:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

- La intensidad en la bobina no puede sufrir discontinuidades:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Teniendo en cuenta estas premisas, puede calcularse el valor inicial de cualquier tensión o intensidad, $f(0^+)$, resolviendo el circuito en el que:

1. Las fuentes de excitación, $e_g(t)$ e $i_g(t)$, se sustituyen por sendas fuentes de valor constante:

$$E_g = e_g(0^+) ; I_g = i_g(0^+)$$

2. En el caso de un circuito RC, el condensador se sustituye por una fuente de tensión de valor:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

3. En el caso de un circuito RL, la bobina se sustituye por una fuente de intensidad de valor:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

En la Figura 1.11 se ha sintetizado el procedimiento a seguir, en el caso de un circuito con condensador, para obtener el circuito en $t=0^+$ que permite calcular los valores iniciales de cualquier variable. Análogamente, en la la Figura 1.12, se muestra el procedimiento para el caso de un circuito con bobina.

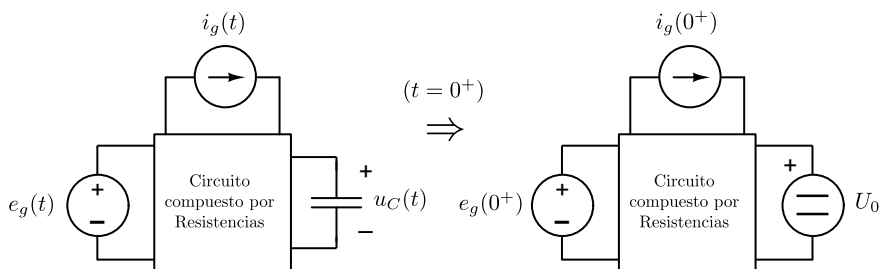


Figura 1.11. Obtención del circuito en $t=0^+$. Circuito con condensador.

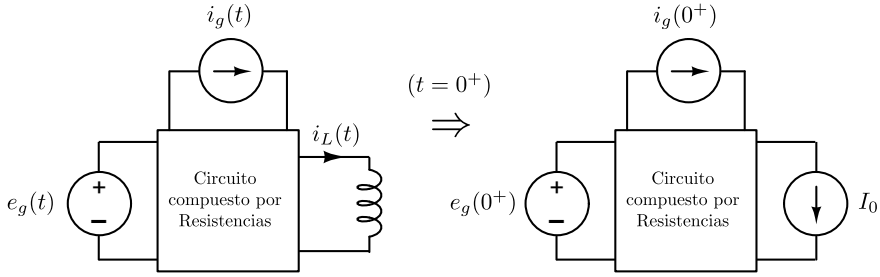


Figura 1.12. Obtención del circuito en $t=0^+$. Circuito con bobina.

1.4. Generalización de la respuesta transitoria

Hasta ahora se ha considerado que el periodo transitorio objeto de análisis comienza en el instante $t=0$. No obstante, el estudio desarrollado en apartados anteriores puede generalizarse a cualquier instante $t=t_0$. Esto será de gran utilidad cuando se quieran analizar varios transitorios concatenados que comienzan en diferentes instantes. Para ello, teniendo en cuenta que se trata de sistemas invariantes en el tiempo, si el transitorio comenzara en $t=t_0$, la respuesta completa sería:

$$f(t) = f_p(t) + [f(t_0^+) - f_p(t_0^+)] e^{-(t-t_0)/\tau} \quad (1.30)$$

Igualmente, para el cálculo de la condiciones iniciales, debe tenerse en cuenta que, en ausencia de respuestas de tipo impulsional:

- La tensión en el condensador no puede sufrir discontinuidades:

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-) \quad (1.31)$$

- La intensidad en la bobina no puede sufrir discontinuidades:

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) \quad (1.32)$$

Teniendo en cuenta estas premisas, puede calcularse el valor inicial de cualquier tensión o intensidad, $f(t_0^+)$, resolviendo el circuito en el que:

1. Las fuentes de excitación, $e_g(t)$ e $i_g(t)$, se sustituyen por sendas fuentes de valor constante:

$$E_g = e_g(t_0^+) ; I_g = i_g(t_0^+)$$

2. En el caso de un circuito RC, el condensador se sustituye por una fuente de tensión de valor:

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-) = U_{t_0}$$

3. En el caso de un circuito RL, la bobina se sustituye por una fuente de intensidad de valor:

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) = I_{t_0}$$

La Figura 1.13 y la Figura 1.14 resumen el procedimiento a seguir para obtener el circuito en $t=t_0^+$ que permite obtener los valores iniciales de cualquier variable en dicho instante.

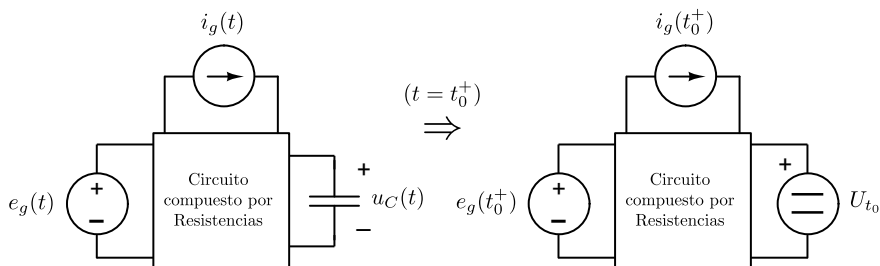


Figura 1.13. Obtención del circuito en $t=t_0^+$. Circuito con condensador.

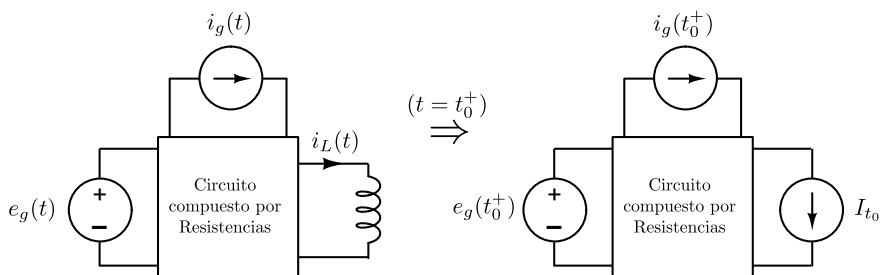


Figura 1.14. Obtención del circuito en $t=t_0^+$. Circuito con bobina.

1.5. Procedimiento para la obtención de la respuesta de un circuito de primer orden

A modo de resumen, se enumeran los pasos a seguir para obtener la tensión o intensidad de cualquier elemento de un circuito de primer orden durante un transitorio que comience en t_0^+ . Si denotamos por $f(t)$ la variable que se desea calcular, esta vendrá dada por:

$$f(t) = f_p(t) + [f(t_0^+) - f_p(t_0^+)] \cdot e^{-(t-t_0)/\tau} \tag{1.33}$$

Cada uno de los términos de la expresión anterior se calculan como sigue:

1. Determinar la respuesta de la variable en régimen permanente, $f_p(t)$ para $t \geq t_0$. Para este punto puede utilizarse cualquiera de las técnicas conocidas de análisis de circuitos en régimen permanente en corriente continua o alterna, según sean las fuentes del circuito. Para obtener $f_p(t_0^+)$ basta con sustituir $t=t_0$ en la expresión de $f_p(t)$ obtenida. En el caso de que el circuito para $t \geq t_0$ no posea fuentes de excitación independientes, $f_p(t)$ será nula.

2. Determinar la constante de tiempo del circuito, τ , para $t \geq t_0$. El valor de esta constante viene dado por $\tau = R_{eq} C_{eq}$ (o $\tau = L_{eq} / R_{eq}$), si el circuito posee condensadores (o bobinas). En primer lugar se obtendrá el circuito pasivo anulando las fuentes independientes y se asociarán todos los condensadores (bobinas) en uno equivalente. Si esto no fuera posible, no se trata de un circuito de primer orden. A continuación se determinará la resistencia equivalente del circuito desde los extremos del condensador equivalente (bobina equivalente).
3. Determinar $f(t_0^+)$, valor inicial de la variable considerada. Sea cual sea la variable que se quiere determinar para $t \geq t_0$, es necesario conocer la tensión del condensador $u_C(t_0^-)$ (intensidad de la bobina $i_L(t_0^-)$) justo antes de comenzar el transitorio, instante t_0^- . Esta variable es, en principio, la única que se mantiene constante desde t_0^- a t_0^+ . Conocido este valor, se podrá analizar el circuito en $t=0^+$, donde el condensador (bobina) se sustituye por una fuente de tensión (intensidad) de valor $u_C(t_0^-)$ ($i_L(t_0^-)$). Además, todas las fuentes independientes se sustituyen por fuentes de valor constante e igual al valor de la fuente en $t=t_0^+$.

Cabe señalar que los tres pasos anteriores son independientes entre sí, por lo que el orden puede alterarse libremente. Con ello, se habrán determinado todos los términos que constituyen la respuesta completa de la variable buscada.

Ejemplo 1.5.1. En el circuito de la Figura 1.15, en $t=0$ se cierra el interruptor. Calcular la tensión $u_C(t)$ y la intensidad $i(t)$ para $t > 0$, sabiendo que $u_C(0^-) = 4$ V.

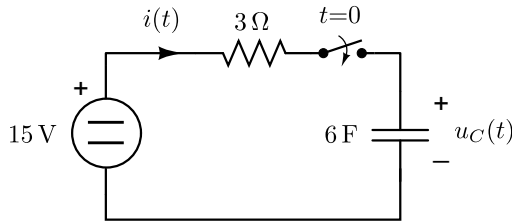


Figura 1.15.

Solución. Al tratarse de un circuito de primer orden, la tensión $u_C(t)$ y la intensidad $i(t)$ vendrán expresadas por:

$$u_C(t) = u_C^p(t) + [u_C(0^+) - u_C^p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = i^p(t) + [i(0^+) - i^p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau}$$

A continuación se determinará la respuesta en régimen permanente, la constante de tiempo y la condición inicial de estas variables.

Respuesta en régimen permanente. En este caso, una vez cerrado el interruptor, la única fuente de excitación es de corriente continua, por lo que habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.16, donde el condensador se ha sustituido por un circuito abierto.

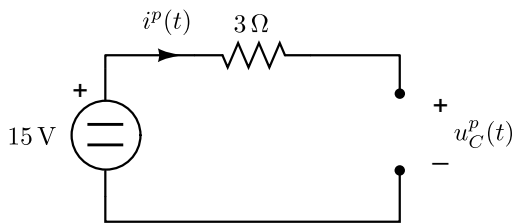


Figura 1.16. Circuito en régimen permanente de corriente continua.

Resolviendo el circuito de la Figura 1.16 se obtienen las magnitudes en régimen permanente:

$$i^p(t) = 0\text{ A} ; u_C^p(t) = 15\text{ V}$$

Asimismo:

$$i^p(0^+) = 0\text{ A} ; u_C^p(0^+) = 15\text{ V}$$

Constante de tiempo. Al ser un circuito de tipo RC, la constante de tiempo es la siguiente:

$$\tau = RC = 3 \cdot 6 = 18\text{ s}$$

Condiciones iniciales. Según el enunciado, antes de cerrar el interruptor la tensión del condensador es $u_C(0^-) = 4\text{ V}$. Para obtener las condiciones iniciales se empleará el circuito en el instante $t = 0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez cerrado el interruptor, sustituyendo en este caso el condensador por una fuente de tensión de valor $u_C(0^+)$. Salvo respuesta de tipo impulsional, la tensión en el condensador no varía al cerrar interruptor, por tanto:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 4\text{ V}$$

El circuito en el instante $t = 0^+$ se muestra en la Figura 1.17.

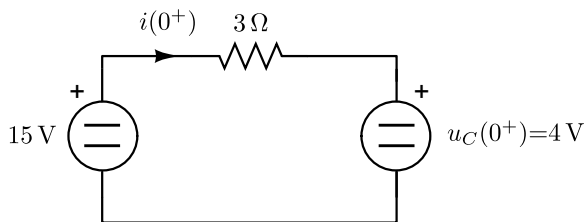


Figura 1.17. Circuito en $t = 0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.17 es fácil obtener $i(0^+)$:

$$i(0^+) = \frac{15 - 4}{3} = \frac{11}{3}\text{ A}$$

En consecuencia, $i(t)$ y $u_C(t)$ para $t > 0$ son las siguientes:

$$u_C(t) = u_C^p(t) + [u_C(0^+) - u_C^p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} = 15 + [4 - 15] \cdot e^{-t/18} = 15 - 11 \cdot e^{-t/18} \text{ V}$$

$$i(t) = i^p(t) + [i(0^+) - i^p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} = 0 + \left[\frac{11}{3} - 0 \right] \cdot e^{-t/18} = \frac{11}{3} \cdot e^{-t/18} \text{ A}$$

Ejemplo 1.5.2. En el circuito de la Figura 1.18, en $t=0$ se cierra el interruptor. Sabiendo que $i_g(t) = 20\sqrt{2} \text{ sen}(5t + 45^\circ) \text{ A}$, calcular la intensidad $i_R(t)$ para $t > 0$.

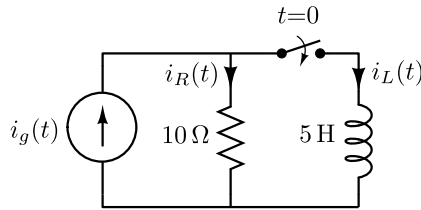


Figura 1.18.

Solución. Al tratarse de un circuito de primer orden, la intensidad $i_R(t)$ vendrá dada por:

$$i_R(t) = i_R^p(t) + [i_R(0^+) - i_R^p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau}$$

A continuación se determinará la respuesta en régimen permanente, la constante de tiempo y la condición inicial de esta variable.

Respuesta en régimen permanente. En este caso, una vez que el interruptor se cierra, la única fuente de excitación en el circuito resultante es de corriente alterna. Por ello, habrá que resolver el circuito en régimen permanente de alterna, para lo cual se usará el circuito en el dominio fasorial mostrado en la Figura 1.19.

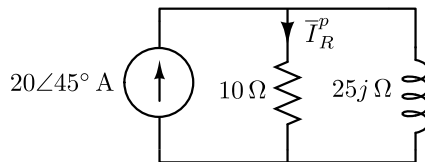


Figura 1.19. Circuito en régimen permanente de alterna.

Resolviendo el circuito de la Figura 1.19 se obtiene \bar{I}_R^p :

$$\bar{I}_R^p = 20\angle 45^\circ \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{25j}} = 20\angle 45^\circ \frac{25j}{10 + 25j} \approx 18,57\angle 66,8^\circ \text{ A}$$

Una vez obtenida la intensidad en régimen permanente en el dominio fasorial, se obtendrá la intensidad en régimen permanente en el dominio temporal:

$$i_R^p(t) = 18,57\sqrt{2} \text{sen}(5t + 66,8^\circ) \text{ A}$$

cuyo valor para $t=0^+$ es el siguiente:

$$i_R^p(0^+) = 18,57\sqrt{2} \text{sen}(66,8^\circ) \approx 24,14 \text{ A}$$

Constante de tiempo. Al ser un circuito RL, la constante de tiempo (para $t>0$) es la siguiente:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

Condiciones iniciales. Antes de cerrar el interruptor no circula intensidad por la bobina, por lo que $i_L(0^-)=0 \text{ A}$. Para obtener la condición inicial se empleará el circuito correspondiente al instante $t=0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez cerrado el interruptor, sustituyendo, en este caso, la bobina por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+)$. Salvo respuesta de tipo impulsional, la intensidad de una bobina no varía al cerrar interruptor, por tanto:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0 \text{ A}$$

Además, la fuente de alterna $i_g(t)$ se sustituye por una fuente de valor constante igual a $i_g(0^+)$, que en este caso es:

$$i_g(0^+) = 20\sqrt{2} \text{sen}(0 + 45^\circ) = 20 \text{ A}$$

El circuito en el instante $t=0^+$ se muestra en la Figura 1.20.

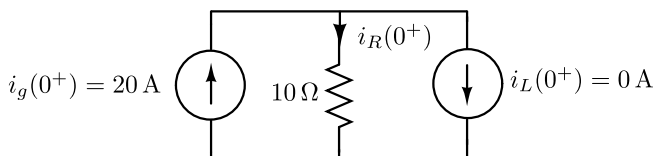


Figura 1.20. Circuito en $t=0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.20 es fácil obtener $i_R(0^+)$:

$$i_R(0^+) = 20 \text{ A}$$

Finalmente, la intensidad $i_R(t)$ para $t>0$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= i_R^p(t) + [i_R(0^+) - i_R^p(0^+)] \cdot e^{-t/\tau} \\ &= 18,57\sqrt{2} \text{sen}(5t + 66,8^\circ) + [20 - 24,14] \cdot e^{-2t} \text{ A} \end{aligned}$$

1.6. Casos que provocan impulsos

Como se ha indicado anteriormente, las tensiones de los condensadores y las intensidades de las bobinas no pueden sufrir discontinuidades en ausencia de respuestas de tipo impulsional. Sin embargo, en determinadas situaciones estas variables pueden sufrir una discontinuidad de tipo salto, apareciendo un escalón en su evolución, llevando asociada una respuesta impulsional. Estas situaciones son dos:

- Conexión en paralelo de condensadores con distinta tensión inicial.
- Conexión en serie de bobinas con distinta intensidad inicial.

1.6.1. Condensadores en paralelo

Considérese el circuito de la Figura 1.21 donde los condensadores C_1 y C_2 se conectarán en paralelo al cerrarse el interruptor en $t=t_0$. En el instante t_0^- , justo antes de cerrar el interruptor, los condensadores se encuentran cargados a diferente tensión, $u_1(t_0^-) \neq u_2(t_0^-)$. Al cerrar el interruptor, ambos condensadores quedan en paralelo y necesariamente tendrán que igualar sus tensiones, es decir, $u_1(t_0^+) = u_2(t_0^+) = u(t_0^+)$. En este caso no se puede aplicar, como se ha hecho hasta ahora, que la tensión de cada condensador se mantiene desde el instante t_0^- al instante t_0^+ .

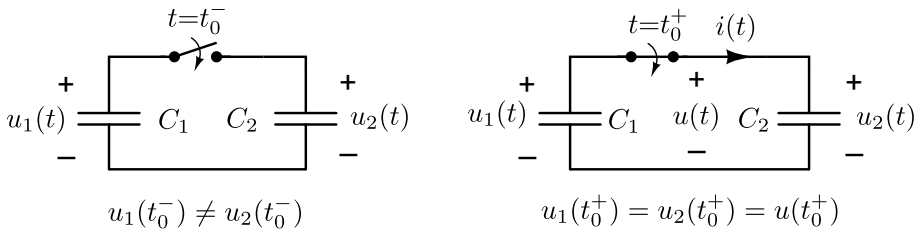


Figura 1.21. Conexión de dos condensadores en paralelo.

Para obtener el valor de la tensión común de los dos condensadores en t_0^+ se aplica el principio de conservación de carga, el cual establece que la carga total en un sistema aislado es constante. Esto implica que la carga total almacenada no puede cambiar bruscamente. De esta forma:

$$\Sigma q_i(t_0^-) = \Sigma q_i(t_0^+) \Rightarrow C_1 u_1(t_0^-) + C_2 u_2(t_0^-) = (C_1 + C_2) u(t_0^+) \quad (1.34)$$

Por tanto, la tensión que tendrán ambos condensadores en t_0^+ será:

$$u(t_0^+) = \frac{C_1 u_1(t_0^-) + C_2 u_2(t_0^-)}{C_1 + C_2} \quad (1.35)$$

A partir de ese instante, puede considerarse que el circuito posee un solo condensador de capacidad $C_{eq} = C_1 + C_2$ cargado a la tensión $u(t_0^+)$.

Aunque la carga total se conserva, existe un transvase de carga desde un condensador a otro en un tiempo infinitesimal. Esto solo puede conseguirse si la intensidad que circula es

muy elevada, concretamente de tipo impulsional. La intensidad que circula en el instante de cerrar el interruptor se puede calcular teniendo en cuenta la ecuación del condensador C_2 :

$$i(t) = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \Rightarrow i(t)dt = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} dt \quad (1.36)$$

Integrando ambos miembros entre t_0^+ y t_0^- resulta:

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} i(t)dt = C_2 \int_{t_0^-}^{t_0^+} \frac{du_2(t)}{dt} dt = C_2 u(t_0^+) - C_2 u_2(t_0^-) \neq 0 \quad (1.37)$$

Teniendo en cuenta que la función delta de Dirac o impulso unitario satisface las siguientes propiedades

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases} \quad \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)dt = 1 \quad (1.38)$$

se deduce que el valor de la intensidad será:

$$i(t) = C_2 (u(t_0^+) - u_2(t_0^-)) \cdot \delta(t - t_0) \quad (1.39)$$

Si en lugar de dos condensadores, se tienen n condensadores con diferentes tensiones iniciales que se conectan en paralelo en un instante t_0 , la tensión de todos ellos en t_0^+ viene dada por:

$$u(t_0^+) = \frac{\sum_{i=1}^n C_i u_i(t_0^-)}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad (1.40)$$

A partir del incremento de tensión que sufre cada condensador, puede determinarse la intensidad que circula por él en t_0 según:

$$i_i(t) = C_i (u(t_0^+) - u_i(t_0^-)) \cdot \delta(t - t_0) \quad (1.41)$$

En esta última ecuación se han supuesto referencias pasivas, es decir, que la intensidad calculada es la que circula del terminal positivo al negativo de la tensión.

1.6.2. Bobinas en serie

En el circuito de la Figura 1.22 se tienen dos bobinas por las que circulan sendas intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Al abrirse el interruptor, las bobinas quedarán conectadas en serie siendo, por tanto, la misma intensidad para ambas. Si en el instante t_0^- las intensidades tienen valores diferentes, $i_1(t_0^-) \neq i_2(t_0^-)$, cuando se abra el interruptor las bobinas no podrán mantener estos valores ya que debe cumplirse que $i_1(t_0^+) = i_2(t_0^+) = i(t_0^+)$. En este caso no se puede considerar, como se ha hecho hasta ahora, que la intensidad de las bobinas se mantienen desde el instante t_0^- al instante t_0^+ .

Para obtener el valor de la intensidad inmediatamente después de abrir el interruptor, se tendrá en cuenta el principio de conservación de flujo, el cual establece que el flujo total

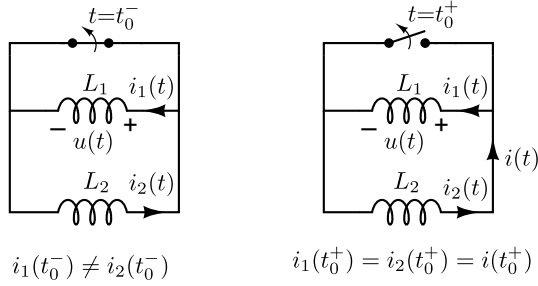


Figura 1.22. Conexión de dos bobinas en serie.

no puede cambiar bruscamente:

$$\Sigma \phi_i(t_0^-) = \Sigma \phi_i(t_0^+) \Rightarrow L_1 i_1(t_0^-) + L_2 i_2(t_0^-) = (L_1 + L_2) i(t_0^+) \quad (1.42)$$

Por tanto, la intensidad que circula por ambas bobinas en t_0^+ será:

$$i(t_0^+) = \frac{L_1 i_1(t_0^-) + L_2 i_2(t_0^-)}{L_1 + L_2} \quad (1.43)$$

A partir de ese instante, puede considerarse que el circuito posee una sola bobina de coeficiente de autoinducción $L_{eq} = L_1 + L_2$ con intensidad inicial $i(t_0^+)$.

La discontinuidad que aparece en la intensidad de cada bobina lleva asociada una respuesta de tipo impulsional en su respectiva tensión. La tensión a la que se ve sometida la bobina L_1 se puede calcular teniendo en cuenta su ecuación:

$$u(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \Rightarrow u(t)dt = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} dt \quad (1.44)$$

Integrando ambos miembros entre t_0^+ y t_0^- resulta:

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} u(t)dt = L_1 \int_{t_0^-}^{t_0^+} \frac{di_1(t)}{dt} dt = L_1 i(t_0^+) - L_1 i_1(t_0^-) \neq 0 \quad (1.45)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac (1.38), el valor de la tensión será:

$$u(t) = L_1 (i(t_0^+) - i_1(t_0^-)) \cdot \delta(t - t_0) \quad (1.46)$$

El estudio puede extenderse fácilmente a n bobinas con intensidades iniciales diferentes que, en un instante determinado t_0 , se conectan en serie. La intensidad de todas ellas en t_0^+ viene dada por:

$$i(t_0^+) = \frac{\sum_{i=1}^n L_i i_i(t_0^-)}{\sum_{i=1}^n L_i} \quad (1.47)$$

Finalmente, a partir del incremento de intensidad que sufre la intensidad de cada bobina, puede determinarse la tensión a la que se ve sometida cada una de ellas en t_0 :

$$u_i(t) = L_i (i_i(t_0^+) - i_i(t_0^-)) \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.48}$$

En esta última ecuación se han supuesto referencias pasivas para la tensión e intensidad de cada bobina.

1.7. Modelo de condensador y bobina con condiciones iniciales

En las situaciones en las que un condensador tenga carga inicial o que por una bobina circule una determinada intensidad inicial, se pueden establecer modelos que facilitan su tratamiento.

Para el caso del condensador, si la tensión inicial es $u_C(t_0^+)$, entonces la tensión en el mismo para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0^+$ se puede expresar de la siguiente forma ¹:

$$u_C(t) = u_C(t_0^+) + \int_t^{t_0^+} \frac{i_C(\lambda)}{C} d\lambda = u_C(t_0^+) + u_C^d(t) \tag{1.49}$$

donde $u_C^d(t)$ es la tensión de un condensador descargado. De esta forma se obtiene el circuito equivalente de la Figura 1.23.

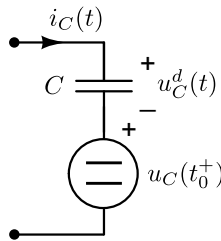


Figura 1.23. Circuito equivalente de condensador cargado inicialmente.

Para la bobina, si la intensidad inicial que circula por ella es $i_L(t_0^+)$, entonces la intensidad en la misma para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0^+$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$i_L(t) = i_L(t_0^+) + \int_t^{t_0^+} \frac{u_L(\lambda)}{L} d\lambda = i_L(t_0^+) + i_L^d(t) \tag{1.50}$$

donde $i_L^d(t)$ es la intensidad de una bobina sin condición inicial. De esta forma se obtiene el circuito equivalente de la Figura 1.24.

¹ Se ha usado la variable λ para evitar que coincidan la variable de integración con el límite superior de integración.

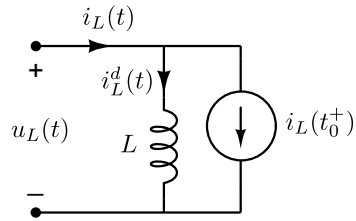


Figura 1.24. Circuito equivalente de bobina por la que circula una intensidad inicial.

Estos modelos se pueden usar en cualquier situación, sin embargo será especialmente útil para resolución de circuitos donde haya condensadores conectados en serie y/o bobinas conectadas en paralelo.