JAVIER A. BARRIOS GARCÍA
MARIANELA CARRILLO FERNÁNDEZ
MARÍA CANDELARIA GIL FARIÑA
CONCEPCIÓN GONZÁLEZ CONCEPCIÓN
CELINA PESTANO GABINO

ANÁLISIS DE FUNCIONES EN ECONOMÍA Y EMPRESA

Un enfoque interdisciplinar

2ª edición

DIAZ DE SANTOS

Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

Segunda edición

Ediciones Díaz de Santos
Internet: http//www.editdiazdesantos.com
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-392-6
Depósito Legal: M-13836-2022

Fotocomposición y diseño de cubiertas: P55 Servicios Culturales

Printed in Spain Impreso en España

ÍNDICE

Prólogo .... **XIII**

PARTE I
EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1. Las Matemáticas en Economía y Empresa **3**
1.1. El uso de las Matemáticas en Economía y Empresa 3
1.1.1. Economía Discursiva y Economía Matemática 3
1.1.2. Modelo económico-matemático. Concepto y construcción 5
1.1.3. Ventajas e inconvenientes del uso de las Matemáticas en Economía y Empresa 7
1.2. Lenguaje y razonamiento matemático 11
1.2.1. Símbolos e ideas sobre el razonamiento matemático 11
1.2.2. Nociones elementales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ 14
Apuntes de Historia 24
Precursores del uso de las Matemáticas en la Ciencia Económica y Empresarial 24
Notas biográficas: William Stanley Jevons 25
Textos Clásicos: W. S. Jevons 26
Prácticas de Informática 28
Ejercicios propuestos 30
Apéndice 31

PARTE II
CÁLCULO DIFERENCIAL DE FUNCIONES REALES

2. Funciones reales de una variable real **37**
2.1. El concepto de función en Economía. Ejemplos 37
2.2. Definición y propiedades 40
2.3. Tipos de funciones 43
2.3.1. Función explícita y función implícita 43
2.3.2. Función compuesta y función inversa 45
2.3.3. Función par y función impar 48
2.3.4. Función periódica 49
2.3.5. Función creciente y función decreciente 50
2.3.6. Función cóncava y función convexa 51
2.4. Concepto de límite. Propiedades y cálculo 53

2.4.1. Definición intuitiva de límite puntual. Límites laterales 53
2.4.2. Definición formal de límite puntual. Límites laterales 56
2.4.3. Cálculo de límites 58
2.5. Continuidad. Definición y propiedades 65
2.6. Derivabilidad. Definición y propiedades. Derivadas sucesivas 72
2.7. Diferenciabilidad. Definición y propiedades. Diferenciales sucesivas..... 87
2.8. Aproximaciones polinómicas. Desarrollo de Taylor.............................. 90
2.9. Representación gráfica de una función. Estudio analítico 94
2.10. Aplicaciones en Economía y Empresa. Funciones notables. Marginalidad y elasticidad 101
Apuntes de Historia.. 115
El lenguaje de la teoría de funciones en Economía 115
Notas Biográficas: Antoine Augustin Cournot 116
Textos Clásicos: A.A. Cournot 116
Prácticas de Informática 120
Ejercicios propuestos 121

3. Funciones reales de varias variables reales 129
3.1. Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ 129
3.1.1. Definición de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$......................... 135
3.1.2. Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Representación gráfica 135
3.2. Límite puntual de una función real de varias variables reales............... 142
3.2.1. Límite puntual de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$. Límites direccionales.. 142
3.2.2. Cálculo de límites dobles. Propiedades...................................... 149
3.2.3. Límite de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.......................... 152
3.3. Continuidad. Definición y propiedades 153
3.4. Derivabilidad parcial. Definición y propiedades 156
3.5. Derivadas parciales sucesivas 162
3.6. Incremento y diferencial... 164
3.7. Diferenciales sucesivas 172
3.8. Aproximaciones polinómicas. Desarrollo de Taylor.............................. 173
3.9. Funciones convexas. Diferenciabilidad y convexidad 175
3.10. Aplicaciones en Economía y Empresa 177
Apuntes de Historia.. 182
Funciones reales de varias variables reales en Economía...................... 182
Notas Biográficas: Alfred Marshall 182
Textos Clásicos: A. Marshall, V. Pareto, J. A. Schumpeter..................... 184
Prácticas de Informática 189
Ejercicios propuestos 191

4. Funciones compuestas, inversas e implícitas......................................197
4.1. Función compuesta 197
4.1.1. La regla de la cadena para la derivación 201
4.2. Función inversa.. 209

4.3. Función implícita..... 217
4.4. Aplicaciones en Economía y Empresa 227
Apuntes de Historia..... 236
El papel de algunas funciones matemáticas en la modelización económica 236
Notas Biográficas: Paul A. Samuelson 237
Textos Clásicos: A. Cournot, W. Jevons, W. Pareto, P. Samuelson 237
Prácticas de Informática 243
Ejercicios propuestos 245

5. Funciones homogéneas 253
5.1. Justificación económica 253
5.2. Definición e interpretación. Aspectos geométricos 260
5.2.1. Definición e interpretación 260
5.2.2. Aspectos geométricos de las funciones homogéneas 263
5.3. Propiedades básicas de las funciones homogéneas 268
5.4. Teorema de Euler. Interpretación económica 271
5.5. Generalizaciones 276
5.2.1. Funciones homogéneas y homotéticas..... 276
5.6. Aplicaciones en Economía y Empresa 277
Apuntes de Historia..... 289
Las funciones homogéneas y el análisis de la distribución según la productividad marginal 289
Notas Biográficas: P.H. Wicksteed..... 290
Textos Clásicos: P.H. Wicksteed..... 291
Prácticas de Informática 295
Ejercicios propuestos 297

PARTE III
TEORÍA CLÁSICA DE OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

6. Introducción a la optimización matemática. Optimización **clásica libre..... 307**
6.1. El problema de optimización..... 307
6.1.1. Breve aproximación histórica a la Optimización Matemática 308
6.1.2. Clasificación de los problemas de Optimización Matemática 309
6.1.3. Planteamiento del problema 310
6.1.4. Definición y existencia de óptimos..... 312
6.1.5. Métodos de resolución..... 315
6.2. La optimización libre en el contexto económico-empresarial 317
6.3. Una variable de decisión 320
6.3.1. Estudio de los puntos críticos: clasificación..... 322
6.4. Varias variables de decisión 327
6.4.1. Estudio de los puntos críticos: clasificación..... 331
6.5. El signo de una forma cuadrática..... 336

6.6. Condiciones suficientes de óptimo local 341
6.7. Convexidad y optimalidad global 345
6.8. Aplicaciones en Economía y Empresa 347
Apuntes de Historia 352
Optimización Matemática y Teoría Económica 352
Notas Biográficas: Léon Walras 353
Textos Clásicos: L. Walras 354
Prácticas de Informática 357
Ejercicios Propuestos 358

7. Optimización clásica condicionada o restringida 363
7.1. Introducción 363
7.2. Método de sustitución 367
7.3. El método de los multiplicadores de Lagrange 369
7.3.1. Condiciones suficientes de óptimo condicionado 377
7.3.2. El hessiano orlado 380
7.4. Condiciones suficientes de optimalidad global 389
7.5. Interpretación de los multiplicadores de Lagrange 391
7.6. Aplicaciones en Economía y Empresa 393
Apuntes de Historia 398
El uso de los multiplicadores de Lagrange en Economía 398
Notas Biográficas: Francis Ysidro Edgeworth 400
Textos Clásicos: F.Y. Edgeworth 400
Prácticas de Informática 402
Ejercicios propuestos 403

PARTE IV
CÁLCULO INTEGRAL

8. Integral de Riemann 411
8.1. El concepto de integral en Economía. Ejemplos 411
8.2. El concepto de integral en Matemáticas 412
8.2.1. Construcción de la integral de Riemann 413
8.2.2. Propiedades fundamentales de la integral de Riemann 416
8.2.3. Condiciones de integrabilidad 416
8.3. La integral como antiderivada: integral indefinida 417
8.3.1 Resultados fundamentales 419
8.3.2. Cálculo de funciones primitivas 420
8.4. Métodos elementales de integración 421
8.4.1. Cambios de variables básicos 422
8.4.2. Integración por partes 425
8.4.3. Integración de funciones racionales por descomposición 427
8.4.4. Integración por desarrollo en serie de Taylor 433

8.4.5. Cambios de variables para integrales de funciones no racionales 434
8.5. El uso de la integración en la ciencia económica 435
8.5.1. Obtención de funciones totales a partir de funciones marginales 435
8.5.2. Excedente del consumidor (o del demandante) 436
8.5.3. Excedente del productor (o del oferente) 437
8.5.4. Función de distribución en estadística 439
8.5.5. Valor actual de un flujo de dinero 440
8.5.6. Valor medio de una función en un intervalo 441
8.5.7. Análisis dinámico 442
Apuntes de Historia 443
El cálculo integral en la Economía 443
Notas Biográficas: Vilfredo Pareto 444
Textos Clásicos: W.S. Jevons, V. Pareto y E. Barone 444
Prácticas de Informática 448
Ejercicios propuestos 449

9. Extensiones de la integral de Riemann 453
9.1. Integrales impropias y múltiples en Economía. Ejemplos 453
9.2. Integrales impropias 454
9.2.1. Criterios de convergencia 458
9.2.2. Integrales impropias especiales: funciones eulerianas 461
9.3. Integrales múltiples 466
9.3.1. Cálculo de integrales dobles 468
9.3.2. Cambio de variables en una integral doble 472
9.3.3. Integrales triples 476
9.4. Aplicaciones económicas 478
9.4.1. Función de distribución en estadística 478
9.4.2. Valor actual de un flujo de dinero 481
9.4.3. Valor medio de una función en un recinto 482
Apuntes de Historia 483
Precursores del uso del cálculo integral en la Economía a través de la Estadística 483
Notas Biográficas: Pierre-Simon Laplace 484
Textos Clásicos: A.A. Cournot 485
Prácticas de Informática 488
Ejercicios propuestos 489

Referencias bibliográficas 495

PRÓLOGO

Hemos elaborado este libro como amplio manual de consulta por parte de estudiantes del primer ciclo de titulaciones universitarias en campos científicos, técnicos, económicos y sociales, en especial para los referidos a Economía, Administración y Dirección de Empresas y Finanzas, por cuanto los ejemplos y ejercicios que se citan están relacionados con estas materias.

Se puede considerar como un texto continuación de los libros de bachillerato en las opciones científicas, tecnológicas, económicas y sociales. A diferencia de estos últimos, este manual intenta aportar al alumno que ingresa en la universidad una visión más científica del lenguaje propio de las matemáticas, que aporta más capacidad de abstracción y modelización de la realidad, incentivada por las aplicaciones en campos de connotaciones sociales importantes como la Economía, la Empresa y las Finanzas. Esta visión está encaminada a mejorar la formación científica desde el primer curso universitario y permite al alumno elegir, en un futuro, la lectura de textos económicos que de otra forma sería difícil abordar por su abundante lenguaje matemático.

La importancia del análisis de funciones, tanto desde un punto de vista numérico como desde un punto de vista analítico, dentro del Análisis Económico y otras ramas de las Ciencias Económicas y Empresariales es indiscutible. A lo largo del texto se introducen numerosos ejemplos resueltos y se visualizan los conceptos, definiciones y propiedades a través de gráficos que se completan con los estudios analíticos correspondientes.

Al final de cada capítulo hemos introducido un apartado dedicado a aspectos históricos basados en textos maestros dentro de la Economía y la Empresa, que muestran diferentes contextos en los que se hace uso del lenguaje de las funciones, como expresión de la relación de dependencia entre diferentes variables.

Los estudiantes deberán familiarizarse con el uso de software o calculadora científica y con el uso de material disponible a través de la red ya que, sin duda, constituyen elementos importantes a la hora de efectuar cálculos y visualizar propiedades, todo ello como enriquecimiento de otras técnicas más tradicionales.

El criterio de numeración que en este manual se ha seguido en las definiciones, teoremas y proposiciones es correlativo para todos ellos y ayuda simplemente a localizarlos dentro del capítulo correspondiente. Muchas de las demostraciones no se incluyen en el texto para darle más peso a las aplicaciones e interpretaciones de los resultados. En cada caso indicamos referencias adecuadas para aquellos lectores que deseen consultar estas demostraciones.

Los conceptos básicos de funciones se acompañan de sus homólogos en la teoría económica. Los tipos de funciones que abordamos, en particular, las funciones convexas, las funciones compuestas, las funciones homogéneas, han sido elegidos pensando en su nivel de uso en Economía, Empresa y Finanzas. Propiamente, los autores hemos considerado conveniente destacar el papel de la composición de funciones, ya que permite simbolizar las abundantes relaciones indirectas con que nos encontramos al construir cualquier modelo económico. Así mismo, hemos decidido exponer con mayor amplitud de la habitual en otros textos, los conceptos y virtudes de las funciones homogéneas por su uso frecuente en la modelización dentro de la teoría económica.

En definitiva, esta iniciativa permite adquirir la perspectiva de las aplicaciones propias de la teoría de las funciones reales de una y varias variables reales en los campos citados y les inicia en el estudio de dos áreas que destacan por su importancia: por un lado, la Programación Matemática que juega un papel fundamental en la toma de decisiones económicoempresariales y, por otro, la Integración de Funciones, de aplicación en multitud de modelos teóricos y econométricos.

Como se observará, este manual es el resultado de un trabajo de equipo, a lo largo de varios años de experiencia docente, que surge a partir de la coordinación que llevamos a cabo los profesores que impartimos asignaturas de Matemáticas en el Departamento de Economía Aplicada y Métodos Cuantitativos de la Universidad de La Laguna, más necesarias si cabe a partir de la nueva estructura cuatrimestral de la reforma y contrarreforma de los planes de estudio en las titulaciones de Grado en Economía, Grado en Administración de Empresas y Grado en Contabilidad y Finanzas en nuestra Universidad.

Los autores.
Febrero de 2021.

PARTE I

EL PAPEL DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

I

LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1.1. EL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1.1.1. Economía Discursiva y Economía Matemática

Hasta hace pocos años, y en algún caso aún hoy en día, ha sido costumbre, al comenzar cualquier libro de texto dedicado a exponer contenidos de Matemáticas en el ámbito de la Ciencia Económica y Empresarial, lanzar una arenga, apoyada en los testimonios de economistas ilustres (a ser posible Premios Nobel) a favor de la utilización de esta herramienta en un campo cuyos especialistas se habían mostrado, históricamente, muy reacios al empleo de la misma en sus escritos[1].

Y es que, a lo largo de épocas pasadas se establecía una diferenciación aparentemente taxonómica, pero sutil en el fondo, entre lo que se entendía como **Economía Discursiva***,* o aquella parte del razonamiento económico que se establece por medio del lenguaje natural, y **Economía Matemática**, entendida, en sentido amplio, como aquella otra porción del razonamiento económico que emplea, en alguna medida, el lenguaje y la lógica que proveen las Ciencias Matemáticas en su desarrollo.

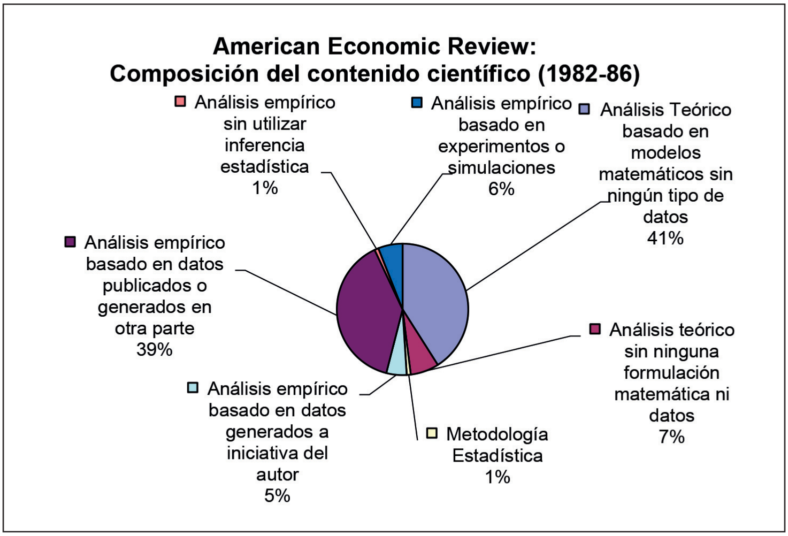
Sin embargo, en la actualidad, ya inmersos en el siglo XXI y con él en un nuevo milenio, esta manera de enfocar el tema en cuestión se encuentra claramente desfasada, sonando esta vieja disputa a "agua pasada" dentro de la profesión. Y no podía ser de otra forma, puesto que cualquier practicante de la disciplina no habrá tenido más remedio que echar mano de alguna herramienta matemática, aunque sea un mero gráfico, en algún punto a lo largo de su carrera.

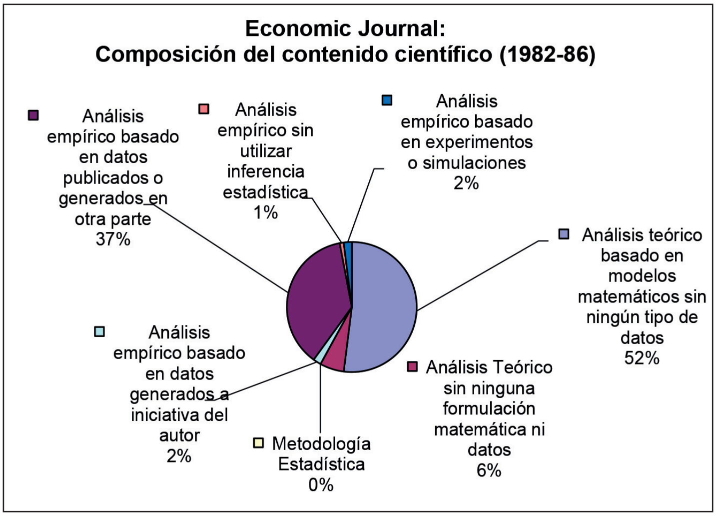
Es más, cualquiera que se adentre en el cuerpo del pensamiento económico moderno debe estar familiarizado, en mayor o en menor medida, de acuerdo con el grado de profundización que desee, con el lenguaje y las técnicas matemáticas al uso, aunque luego ni siquiera lo utilice en su propio razonamiento. En caso con-

1 Véase, por ejemplo, los ya clásicos autores foráneos traducidos al castellano: Chiang (1987), Arya y Lardner (1992), Colin Glass (1982), entre otros muchos. Algunos autores españoles se dedican a profundizar fundamentalmente en los aspectos matemáticos, por ejemplo, Grafe (1991), Caballero y otros (1994), o Vilar y otros (1993).

trario, se verá relegado solamente a consultar una fracción, en múltiples aspectos o representativa, de la literatura científica económica y empresarial.

***Nota Complementaria* 1.1:** Para ilustrar el comentario anterior podríamos acudir al siguiente gráfico[2] en el que se comparan los contenidos de dos publicaciones económicas punteras en EE UU, a saber, *American Economic Review* y *Economic Journal*, entre 1982 y 1986. Para ello se desagregan los artículos publicados en ambas en dos grandes categorías, Teoría y Análisis Empírico, dividiéndose estas a su vez en subcategorías tal y como se indica en los gráficos.





---

2 Véase Morgan (1988).

La Nota Complementaria 1.1 nos da pie también para resaltar dos de los rasgos predominantes en la Ciencia Económica y Empresarial moderna. En primer lugar, a partir de comienzos del siglo XX, el empleo masivo de las **técnicas estadísticas** para la validación empírica de las teorías económicas propuestas, y con ellas su base matemática; en segundo lugar, el **uso del ordenador**, que llega hoy en día a constituirse como una herramienta imprescindible, tanto de cara al análisis teórico como empírico, sobre todo a raíz de la popularización del PC lanzado al mercado por primera vez en 1981 de la mano de IBM.

1.1.2. Modelo económico-matemático. Concepto y construcción

El mundo económico y empresarial es un ente enormemente complejo. Cualquier fenómeno económico que analicemos está influido, a buen seguro, por multitud de factores. Baste pensar, por ejemplo, en la demanda de un simple bien del mercado. Sus altibajos a lo largo del tiempo pueden deberse a diferentes motivos como, por ejemplo, variaciones de su precio, variaciones del precio de bienes relacionados con él, cambios en la renta de los consumidores, cambios en los gustos de estos, cambios en la cantidad de población, aparición en el mercado de nuevos productos que realizan idéntica o similar función, cambios climatológicos, etc.

Dado que a nadie se le escapa que resultaría imposible detallar todas las variables que influyen en un sistema económico determinado, a los economistas no les ha quedado más remedio que hacer abstracción del mundo real y elaborar modelos sencillos que recojan lo esencial del mismo, intentando reducir los fenómenos económicos a proporciones manejables, con el fin de vislumbrar con mayor claridad las interrelaciones entre sus diferentes componentes.

De igual forma que un mapa callejero nos puede ayudar a comprender y movernos por una gran ciudad, aunque no incluya todas y cada una de sus casas y edificios, un modelo económico puede llegar a ser muy útil para comprender un sistema económico, aunque no tenga en cuenta todos y cada uno de los factores que están influyendo en su comportamiento.

Además, esta manera de obrar no es ajena al resto de disciplinas científicas. Así, un físico modeliza la materia sobre la base de la idea de molécula y átomo, aunque este sea en realidad un modelo muy simplificado de la estructura de la materia; un arquitecto basa sus construcciones en planos y maquetas, etc.

Ahora bien, si en los comienzos del pensamiento económico tales modelos fueron construidos mediante el uso del lenguaje discursivo natural, comienza a mediados del siglo XIX un nuevo enfoque del Análisis Económico[3], fundamentado en la utilización del lenguaje y la lógica propia de las Ciencias Matemáticas, con la finalidad principal de proveer de mayor racionalidad y coherencia interna a estos modelos.

Esta nueva dirección en el análisis económico se consolida a lo largo del siglo XX, y junto a la utilización masiva de técnicas estadísticas y del ordenador, da

3 Véanse los Apuntes de Historia al final del presente capítulo.

lugar a lo que actualmente se conoce como **modelo económico-matemático**, entendido este como una construcción teórica formulada en lenguaje matemático que intenta explicar las interacciones de las variables económicas en estudio (representación de la realidad económica).

El proceso de **construcción de un modelo económico-matemático** no resulta unívoco para todos los investigadores, de la misma manera que el denominado "método científico" en realidad aglomera un conjunto de técnicas y métodos cuyo denominador común es llevar el apellido "científico"[4]. De cualquier manera, podríamos esquematizar su procedimiento de confección según el diagrama de flujo recogido en la Figura 1.1 donde, en realidad, no es absolutamente necesario pasar por todas y cada una de las etapas recogidas para considerar completamente acabada la modelización.

Si diéramos un repaso a fondo de los modelos económicos elaborados hasta el momento, apreciaríamos que pueden existir algunos cuyas hipótesis de partida se basan en supuestos *razonables* que no se encuentran corroborados por el análisis empírico, en muchos casos porque contrastar estos puede ser imposible de llevar a efecto (por ejemplo, la teoría de la utilidad del consumidor). También existen modelos cuyas conclusiones pueden ser difícilmente corroboradas por un análisis empírico (por ejemplo, el modelo de empresa maximizadora del beneficio supone que la empresa conoce toda la información relevante sobre sus costes y sobre el mercado al que vende). En muchos casos, el análisis empírico apunta una posible pauta económica de comportamiento[5]. En otros, se comienza con un modelo teórico inicial *razonable*, y se va perfeccionando a través de su contrastación con los datos aportados por la realidad económica hasta obtener un modelo que refleje adecuadamente el devenir[6]. Sin embargo, habrá ocasiones en que nos enfrentaremos a modelos teóricos *razonables* que no admiten siquiera contrastación empírica por carecer de contrapartidas en la realidad económica[7].

Así las cosas, podemos concluir que el análisis económico-matemático moderno se compone de una amalgama entre **Teoría Económica**, formulada en términos matemáticos, y **Econometría**, cuyas evoluciones, bien sea por separado o interaccionando, fundamentan y conforman buena parte de la Ciencia Económica y Empresarial contemporánea.

4 Esto no es sino una manera formal de expresar la idea de que "cada maestrillo tiene su librillo".

5 Como apunta Friedman (1991): "La moda actual me incita a correr hacia el ordenador y mirar qué extrapolación econométrica me puede indicar."

6 Por ejemplo, el simple modelo de demanda y oferta de un producto como predictor del precio de mercado de este.

7 Así tenemos la Teoría del Equilibrio General, desarrollada inicialmente por los premios Nobel Arrow y Debreu (1954), o la versión más sofisticada de Auman (1964).

Figura 1.1. Diagrama explicativo del proceso de construcción de un modelo económico-matemático[8].

1.1.3. Ventajas e inconvenientes del uso de las Matemáticas en Economía y Empresa

Mucho se ha hablado y discutido a lo largo de la historia del pensamiento económico acerca del uso de las Matemáticas en el discurso económico, llegando incluso a momentos de controversia que, a mitad del siglo XX, provocaron la aparición de números monográficos en revistas científicas relevantes[9]. La creciente matematización de la Ciencia Económica y Empresarial, su cuantificación y la difusión de la Econometría, aparejada a la extensión y perfeccionamiento de

8 Siguiendo a Costa Reparaz (1982b), González y Gil (2000).

9 El vol. 36, Nº 4, del año 1954, de la *Review of Economics and Statistics* se dedica íntegramente a discutir el papel de las Matemáticas en la Ciencia Económica, con interlocutores tan relevantes como los posteriormente premios Nobel de Economía Paul Samuelson, Lawrence Klein, Jan Tinbergen o Robert Solow, entre otros.

los ordenadores como herramienta fundamental para el tratamiento de datos, es hoy un hecho manifiesto e irreversible, llegando a ser de gran ayuda los nuevos avances en *big data*.

No obstante, y con el objetivo de que el lector las discuta y saque sus propias conclusiones, en los cuadros siguientes intentamos recopilar y sintetizar[10] las principales opiniones vertidas a lo largo de la historia del pensamiento económico y empresarial a favor y en contra del uso de las Matemáticas en esta área de conocimiento. Debe tener claro el lector que solamente pretendemos recoger diferentes opiniones.

PRINCIPALES VENTAJAS DEL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1. Las Matemáticas constituyen **un lenguaje más preciso y conciso** que el discursivo natural. Como tal puede contribuir con **mayor rigor lógico** a la naturaleza acumulativa del conocimiento y a desarrollos analíticos innovadores, sintéticos y a la vez generales, frente a las contribuciones no matemáticas al Análisis Económico que pecan a menudo de vagas, poco rigurosas o infladas en exceso.
2. El método matemático obliga al científico a **explicitar de una manera clara** y sin ambigüedades las hipótesis de partida, erradicando las posibles contradicciones que pudieran existir entre estas o los supuestos encubiertos en las diferentes interpretaciones que se pueden deducir del lenguaje común.
3. Permite la utilización de la **amplia gama de técnicas y teorías disponibles** (lemas, proposiciones, teoremas, etc.) como ayuda en el razonamiento económico.
4. Por añadidura, las Matemáticas sirven de fundamento a los trabajos econométricos y, por tanto, sin ellas difícilmente se podría llevar a cabo la **contrastación científica** con la realidad económica.
5. El conocimiento de las Matemáticas facilita el **uso de software científico.**
6. Nos obliga a **utilizar las matemáticas de forma consciente y discriminada** en la búsqueda de relaciones de la Economía y Empresa con otras ciencias.

10 Siguiendo el trabajo de Beed y Kane (1991).

PRINCIPALES CRÍTICAS AL USO DE LAS MATEMÁTICAS EN ECONOMÍA Y EMPRESA

1. Las Matemáticas **no son el lenguaje materno de los economistas** y, por lo tanto, pueden llevar a problemas tanto de aprendizaje como de comunicación entre economistas discursivos y economistas matemáticos[11].
2. Los axiomas de la Economía Matemática[12] **no** se corresponden con el **comportamiento del mundo real.**
3. El número de teorías generadas por la Economía Matemática **comprobables empíricamente es pequeño** en comparación con el volumen global del Análisis Económico-Matemático. Este argumento es una consecuencia directa del punto anterior. Por tanto, si la expresión matemática de un fenómeno económico no descansa en supuestos reales, entonces, según señalan algunos autores, lógicamente no pueden llevar al científico a predicciones confirmables empíricamente. De esta manera, mientras que los economistas-matemáticos se preocupan fundamentalmente de analizar las propiedades formales de sus modelos, existe escaso interés en generar predicciones contrastables empíricamente[13].
4. **Algunos aspectos económicos no son naturalmente cuantitativos**, en contraposición a lo que proclaman fervientemente los propulsores de las Matemáticas. Las Matemáticas **evitan la atención sobre problemas económicos eminentemente cualitativos,** tales como ciertos rasgos de comportamiento de los agentes económicos o la inclusión de consideraciones de equidad o de las posibles penurias transitorias en los modelos de política económica construidos a partir de la teoría neoclásica, manteniéndose una tendencia a sesgar la información, reduciendo la importancia de aquellas cuestiones que no son convenientemente cuantificables. Como consecuencia de ello, la teoría matemática conduce y da forma a los problemas que son analizados.
5. La traducción del discurso económico sostenido en el lenguaje natural a las Matemáticas puede ser **simplista e ilegítima**, a pesar de la *estricta equivalencia entre símbolos matemáticos y lenguaje literario* que proclamaban autores como Paul Samuelson o George Stigler. Esta crítica se centra, principalmente, en dos características. Una, las Matemáticas no son efectivamente un lenguaje natural y por lo tanto no pueden expresar sino un

11 En este sentido conviene señalar que la inclusión de asignaturas con contenidos de Matemáticas en las titulaciones universitarias de Economía y de Administración y Dirección de Empresas en todas y cada una de las Facultades o Centros relacionados con Economía y Empresa a lo largo de todo el mundo está contemplada para evitar precisamente este tipo de situaciones.

12 Hay que reseñar que esta crítica es aplicable no solamente a la Economía Matemática sino también a la Economía y Empresa, en general.

13 Valga como ejemplo el libro de texto de *Microeconomía Intermedia* escrito por Varian (1991), en el que no se indica explícitamente cómo o cuándo cualquier teorema matemático produce predicciones empíricamente comprobables.

rango limitado de relaciones y acciones humanas; y otra, la expresión de procesos económicos en términos matemáticos puede conllevar connotaciones sobre el comportamiento de los mismos que estos no poseen. Por consiguiente, las explicaciones de fenómenos económicos que incluyen rasgos culturales, sociológicos, históricos o psicológicos, entre otros, son difícilmente reducibles a expresiones matemáticas.

6. **No existe una manera objetiva de comprobar** cuándo la Economía Matemática es más precisa o más simple que la Economía No Matemática. La claridad, precisión y concisión de las Matemáticas pueden ser cuestionadas. ¿Cuál es la definición objetiva de los términos *claridad*, *precisión* o *simplicidad*? Perfectamente pueden existir sistemas económicos analizados más hábilmente por las Matemáticas que sin ellas, y viceversa.
7. Se suele criticar a la Econometría el **preocuparse más por adecuar** ecuaciones de comportamiento, prescindiendo a veces de la Teoría Económica, en aras del mayor poder predictivo del modelo y en detrimento de sus posibilidades explicativas. Por otro lado, también se suele criticar la forma de extrapolar información de una determinada muestra al caso general, pero esto ya es cuestión más propia de la Teoría Estadística.

En un esfuerzo de tolerancia e integración, podemos concluir de la discusión anterior que parece acertado aceptar la pluralidad de métodos existentes en el Análisis Económico moderno, tanto matemáticos como no matemáticos, pues todos ellos contribuyen, cada uno con sus correspondientes costes y beneficios, ventajas e inconvenientes, a *desnudar* la verdad económica.

Ahora bien, también debe quedar claro que los desarrollos modernos de la Ciencia Económica y Empresarial se han guiado, en múltiples ocasiones, mediante métodos matemáticos, y que trabajos basados en estos constituyen una rama del Análisis Económico de gran peso en la actualidad y de gran aceptación en la comunidad científica internacional. Esta perspectiva nos permite afirmar que las causas de la inclusión de asignaturas con contenidos de Matemáticas en las titulaciones universitarias de Economía y de Administración y Dirección de Empresas de todo el mundo residen en dos pilares fundamentales. Por una parte, se intentan corregir los defectos de comunicación existentes en el pasado entre economistas matemáticos y no matemáticos, introduciendo a los futuros economistas o administradores de empresas en diferentes teorías y técnicas matemáticas que les serán de gran utilidad a la hora de comprender con mayor profundidad diferentes aspectos del Análisis Económico moderno. Por otro lado, el poseer este bagaje básico en el terreno matemático permitirá también a los profesionales del área de las próximas generaciones utilizar las herramientas matemáticas adecuadas a sus desarrollos analíticos abandonando la antigua aversión a su empleo.

Teniendo en cuenta todo lo dicho anteriormente, concluimos que entre los conocimientos de cualquier economista moderno deben figurar ciertas nociones y técnicas matemáticas que le proporcionen una cultura general en diferentes teorías matemáticas, que, junto con otros métodos, le serán de gran ayuda en el desempeño de su labor. En palabras del ilustre Frank Hahn[14]:

> *Tengo que decir que alguna clase de formación cuantitativa será de utilidad. Con esto quiero decir que será útil para los economistas ser de aquella clase de personas a las que les gustaban las Matemáticas en la escuela y que no se atemorizan al ver una x. Habrá también otras salidas especiales para aquellos estudiantes más matemáticos. Pienso que también es importante que el economista esté, como se dice generalmente, "ampliamente educado". Por ejemplo, debería leer poesía.*

1.2. LENGUAJE Y RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

En este apartado pretendemos dar un breve repaso, primero a la simbología matemática básica que emplearemos –fundamentalmente la propia de la Teoría de Conjuntos– así como intentar asentar diversas ideas elementales acerca del razonamiento matemático. Posteriormente trataremos aquellas nociones y propiedades del conjunto de números reales y su producto cartesiano que utilizaremos a lo largo de todos los capítulos de este manual.

1.2.1. Símbolos e ideas sobre el razonamiento matemático

Las siguientes tablas recogen, con cierto orden, los símbolos matemáticos de uso frecuente y aquellos aspectos del razonamiento matemático que pensamos debe tener muy claros el lector[15], para avanzar posteriormente en el conocimiento y uso de las Matemáticas como herramienta.

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS DE USO FRECUENTE		
SÍMBOLOS	**SIGNIFICADO**	**EJEMPLOS**
$\{\ \}$	**se utilizan para describir un conjunto**	$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2\}$ $C=\{$números enteros positivos mayores que 4$\}$
$\mathbb{N}$	**conjunto de los números naturales**	$\mathbb{N}=\{0, 1, 2, 3, 4...\}$
$\mathbb{Z}$	**conjunto de los números enteros**	$\mathbb{Z}=\{..., -4, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4...\}$
$\mathbb{Q}$	**conjunto de los números racionales**	$\mathbb{Q}=\{...,-2, -3/2, -1, -1/3, 0, 1/2, 1, 2, 5/2...\}$
$\mathbb{R}$	**conjunto de los números reales**	$\mathbb{R}=\{...,-2, -3/2, -1, -1/3, 0, 1/2, 1, \sqrt{2}, 2, 5/2, \pi...\}$

14 Entrevista a Frank Hahn en Parkin y King (1992), pág. 261.
15 Véase, por ejemplo, de Guzmán (2003).

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS DE USO FRECUENTE		
SÍMBOLOS	**SIGNIFICADO**	**EJEMPLOS**
$\mathbb{R}^+$	**conjunto de los números reales no negativos (incluye el 0)**	$\mathbb{R}^+ = \{0, 1/2, 1, \sqrt{2}, 2, 5/2, \pi...\}$
$\mathbb{R}^-$	**conjunto de los números reales no positivos (incluye el 0)**	$\mathbb{R}^- =\{...,-\pi,-2, -3/2, -1, -1/3, 0\}$
$\in, \notin$	**pertenece, no pertenece**	$1 \in A$, $3 \notin B$
$\subset, \subseteq, \not\subset$	**contenido, contenido o igual, no contenido**	$B \subset A$, $C \not\subset A$, Sea D un conjunto tal que $D \subseteq A$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset Q \subset \mathbb{R}$
$\cup, \cap$	**unión, intersección**	$A \cup C = \mathbb{N}$, $A \cap B = B$
A^c	**conjunto complementario del subconjunto $A \subseteq X$: $A^c = X-A$**	$B \subset A$: $B^c = A-B = \{3,4\}$
$\varnothing$	**conjunto vacío**	$A \cap C = \varnothing$
$/$	**tal que**	$A=\{x / x$ entero positivo menor que 5$\}$
$<, \leq, >, \geq$	**menor, menor o igual, mayor, mayor o igual**	$3<4$, $C =\{x \in \mathbb{Z} / x>4\}$. Sea $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \leq 5$, o bien $x \geq 7$.
∞	**infinito**	$x \to \infty$
$\Rightarrow$	**implica**	perro $\Rightarrow$ animal
$\Leftrightarrow$	**si y solo si**	cuadrado $\Leftrightarrow$ polígono de cuatro lados iguales y cuatro ángulos interiores rectos
$\forall$	**para todo**	$\forall a \in A$, $a<5$
$\exists$	**existe**	$\exists a \in A / a=4$
$\sum, \prod$	**sumatorio, producto**	$\sum_{a \in A} a = \sum_{a=1}^{4} a = 10, \prod_{a \in A} a = \prod_{a=1}^{4} a = 24$

IDEAS ELEMENTALES SOBRE EL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

El razonamiento matemático es esencialmente **deductivo**, esto es, se parte de **unas hipótesis o conjeturas** que se suponen verdaderas y, a través de la lógica, se llegan a conclusiones, **resultados o tesis**, cuya verdad se deduce de las primeras.

Las formas principales que adoptan los resultados matemáticos son las de **Proposición** y **Teorema** (la diferencia suele estar en la mayor importancia o alcance de los Teoremas frente a las Proposiciones). Ambos pueden ser de dos formas:

$$A \Rightarrow B$$
$$A \Leftrightarrow B$$

En el primer caso la hipótesis viene representada por A y se demuestra la tesis B. En este caso también se dice que **B es una condición necesaria para A**, esto es, siempre que ocurra A ocurrirá también B o, dicho de otra manera que suele ser de enorme utilidad en la práctica, **si no se da B tampoco se puede dar A** (esta última afirmación equivalente al primer resultado se suele llamar **contrarrecíproco** y esquemáticamente sería **No B** $\Rightarrow$ **No A**). También se puede decir que **A es una condición suficiente para B**.

El segundo tipo de resultado es lo que se llama **una condición necesaria y suficiente** (caracterización) en el sentido de que A solamente se da cuando se verifica B y viceversa, es decir, no se puede verificar A y no B, ni tampoco verificarse B y no A. Es decir, el segundo resultado equivale a dos resultados del tipo anterior A $\Rightarrow$ B y B $\Rightarrow$ A. Por lo tanto, para probar una condición necesaria y suficiente debemos demostrar ambas implicaciones.

A la hora de demostrar la veracidad de un resultado matemático del tipo **A** $\Rightarrow$ **B**, es importante tener presente que disponemos de varios caminos, principalmente:

- **a) Demostración directa:** consiste en partir de las hipótesis que tengamos y, directamente, empleando el razonamiento y la lógica matemáticas, llegar a comprobar que se verifica la tesis.
- **b) Demostrar el contrarrecíproco:** probar la afirmación **No B** $\Rightarrow$ **No A** directamente, esto es, suponer que no se verifica B y llegar empleando la lógica matemática a que tampoco se verifica A.
- **c) Demostración por reducción al absurdo:** esta es una tercera vía muy utilizada. Consiste en suponer cierta la hipótesis A y también que no se verifica B (suponer cierto No B) e intentar ver que de ello se deriva una situación contradictoria o absurda, con lo cual si se da A necesariamente se tiene que verificar B (en caso contrario llegamos a un absurdo).

Por último, baste señalar que en muchas ocasiones intentaremos probar un resultado sin llegar a acabar de demostrarlo. En estas situaciones puede ayudarnos el tomar algún ejemplo concreto y comprobar si este verifica la afirmación que pretendemos demostrar. Si la satisface, no podremos afirmar la veracidad general del resultado (esto que puede parecer trivial es quizá una de las fuentes de errores más extendidas)[16]. Si por el contrario, encontramos un ejemplo para el que no se satisface la afirmación (esto es lo que se llama un contraejemplo), entonces ya habremos probado la falsedad de la misma[17].

16 Para que el lector comprenda adecuadamente lo que acabamos de comentar bien vale un ejemplo típico debido a Kuhn. Si nos enfrentamos a la afirmación: “todos los cisnes son blancos”, y vemos en un río un cisne blanco, esto no querrá decir que tengamos probada esta afirmación de forma general, sino que simplemente la hemos corroborado en un caso concreto (es decir, solamente hemos comprobado que cierto cisne verifica la afirmación anterior).

17 Siguiendo con el ejemplo del cisne, efectivamente si llegáramos a ver un cisne negro, ya quedaría claro que la afirmación “todos los cisnes son blancos” es radicalmente falsa.

1.2.2. Nociones elementales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$

En este apartado queremos recoger diferentes conceptos referentes a los conjuntos $\mathbb{R}$ y a sus productos cartesianos $\mathbb{R}^n$ que supondrán la base para la mayoría de los temas que tocaremos en el presente manual. En primer lugar, recordemos la definición general de producto cartesiano para comprender en toda su dimensión el conjunto euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.1. El **producto cartesiano de dos conjuntos** A y B se denota **A×B** y es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas

$$A\times B = \{(a,b) \ / \ a\in A \text{ y } b\in B\}$$

Análogamente, el **producto cartesiano de n conjuntos** ($n\in\mathbb{N}$) $A_1,\ldots,A_n$ es el conjunto formado por las n-uplas ordenadas

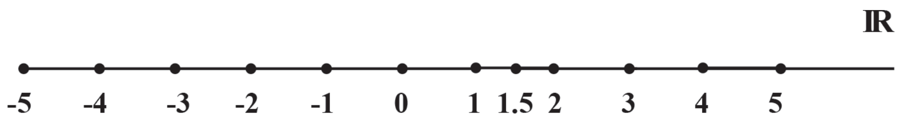
$$A_1\times\ldots\times A_n = \{(a_1,\ldots,a_n) \ / \ a_i\in A_i,\ i=1,\ldots,n\}\ .$$

El caso particular de la definición anterior que más nos interesa son los productos cartesianos de $\mathbb{R}$ por sí mismo, esto es, los denominados **conjuntos euclídeos.**

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1,\ldots,x_n) \ / \ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n\right\}$$

Así obtenemos, por ejemplo:

a) **La recta real ($n = 1$): $\mathbb{R}$.** Como es bien sabido, su representación gráfica es una recta, esto es, existe una aplicación biyectiva entre los puntos de una recta y el conjunto de números reales.



b) **El plano euclídeo (n=2): $\mathbb{R}^2 = \left\{ (x_1, x_2) \ / \ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2 \right\}$.** Su representación gráfica se suele realizar a través del sistema cartesiano habitual con dos ejes de coordenadas.