# Circuitos Eléctricos en Régimen Transitorio

## Teoría y problemas resueltos
## Volumen I

**Alfonso Bachiller Soler, Ramón Cano González**
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

# Índice

# Prólogo

El título de este libro, *Circuitos Eléctricos en Régimen Transitorio. Teoría y Problemas Resueltos*, indica claramente que su contenido trata uno de los temas fundamentales de la teoría de circuitos eléctricos, como también lo son el de *Circuitos Trifásicos* o el de *Fuentes Dependientes*, en el contexto de la Ingeniería Eléctrica; pero en mi opinión, la importancia del comportamiento transitorio de los circuitos rebasa los límites de la ingeniería eléctrica, siendo también un puntal básico de la ingeniería electrónica, principalmente para sus ramas digital, de potencia y de telecomunicaciones. El estudio del régimen dinámico de los circuitos permite interpretar correctamente cierto tipo de comportamientos eléctricos que se escapan, incluso a ingenieros, de un primer razonamiento. Ejemplos de ello son la aparición de tensiones muy superiores a las de los propios generadores en circuitos y en redes eléctrica con efectos destructivos, los disparos intempestivos de interruptores diferenciales en viviendas o la actuación esporádica de las protecciones durante la puesta en servicio de transformadores.

Los transitorios están también presentes en los circuitos electrónicos digitales, debido a que su naturaleza binaria obliga a los transistores a trabajar como interruptores ideales a elevadas velocidades, generándose en cada conmutación un periodo transitorio. Igual ocurre en la electrónica de potencia, donde, por motivos de rendimiento, los semiconductores también trabajan como interruptores, conmutando miles de amperios en fracciones de microsegundos. En estos casos, el régimen permanente de los circuitos se convierte en una secuencia continua de regímenes transitorios.

El funcionamiento transitorio en los dispositivos electrónicos supone rápidas variaciones de la tensión y de la intensidad que pueden provocar perturbaciones electromagnéticas en los propios circuitos y en los que se encuentran en sus proximidades. Los requisitos normativos de Compatibilidad Electromagnética son uno de los puntos clave del diseño electrónico y constituyen hoy una disciplina en los estudios de ingeniería de telecomunicaciones e industrial.

Sirva este preámbulo para destacar la importancia que tiene el estudio del régimen dinámico de los circuitos, tanto eléctricos como electrónicos, para los futuros profesionales de estas especialidades.

El estudio de los transitorios se aborda en este libro enunciando en primer lugar los conceptos teóricos fundamentales, que son posteriormente consolidados con la ayuda de problemas resueltos y comentados de creciente dificultad. Si bien en la práctica profesional los circuitos complejos suelen resolverse mediante simulación y no con herramientas matemáticas como las ecuaciones diferenciales o la transformada de Laplace, resulta fundamental la interpretación y valoración de los resultados numéricos y ello solo es posible si se cuenta con los necesarios conocimientos teóricos.

Este libro está elaborado por dos profesores del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Sevilla, con experiencia en transitorios eléctricos avalada por sus investigaciones en este campo en sus respectivas tesis doctorales. Ramón Cano y Alfonso Bachiller, además aportan cada uno más de 20 años de experiencia docente en Teoría de Circuitos y asignaturas afines. En el ámbito industrial, Alfonso y Ramón han desarrollado proyectos en colaboración con las principales empresas suministradoras de energía y algunos de sus trabajos han tenido repercusión internacional.

El texto está organizado en tres capítulos: Transitorios de primer orden, Transitorios de segundo orden y Transformada de Laplace. Cada capítulo comienza con la teoría correspondiente, apoyada en ejemplos de aplicación, seguida de una colección de problemas resueltos y comentados. En las tres partes se consigue el justo equilibrio entre la teoría necesaria para comprender los conceptos y su aplicación mediante problemas. Equilibrio que es, sin duda, el resultado de muchas horas de pizarra. Los autores, como en todas sus publicaciones, han conseguido con su obra que el lector tenga esa buena impresión que da un libro nada más abrirlo cuando las figuras y la tipografía son de calidad y guardan armonía.

Por último, deseo al lector que este libro le ayude a superar con éxito las asignaturas relacionadas con los circuitos eléctricos en su etapa de estudiante y que sepa extraer lo fundamental de su contenido y conservarlo a lo largo de su futura profesión.

**Vicente Simón Sempere**
Profesor Titular de Universidad
Dpto. Ingeniería Eléctrica
Universidad de Sevilla

# 1

# Transitorios de primer orden

## 1.1. Introducción

En los circuitos cuyos elementos pasivos son únicamente resistencias, las tensiones e intensidades responden de forma inmediata a la evolución de las fuentes de excitación. En este tipo de circuitos, conocidos como circuitos estáticos, las tensiones e intensidades de los elementos vienen dadas por ecuaciones algebraicas y cada instante puede ser analizado sin tener en cuenta los instantes anteriores. Esto no es así en los circuitos que contienen elementos almacenadores de energía, bobinas o condensadores, en los que la relación entre tensión e intensidad viene definida por una ecuación diferencial que hace que la respuesta del circuito sea dinámica. En este tipo de circuitos, denominados circuitos dinámicos, para determinar la respuesta en un instante cualquiera es necesario conocer la evolución anterior de la misma.

En los circuitos dinámicos excitados con fuentes de continua o de alterna, una vez que ha trascurrido un cierto tiempo (régimen transitorio) se alcanza el denominado régimen permanente, donde la respuesta se estabiliza en un valor constante o bien se repite periódicamente, según la excitación sea de continua o alterna, respectivamente. A modo de ejemplo, en la Figura 1.1 y Figura 1.2 se ha representado la respuesta de un circuito RC cuando se excita con una fuente de tensión continua y fuente de tensión alterna respectivamente. En ellas puede observarse cómo, tras el régimen transitorio, se alcanza el régimen permanente.

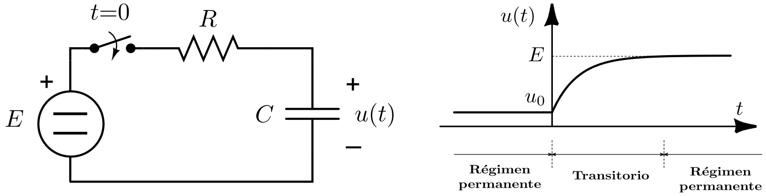



**Figura 1.1.** Conexión de un circuito RC a una fuente de corriente continua.

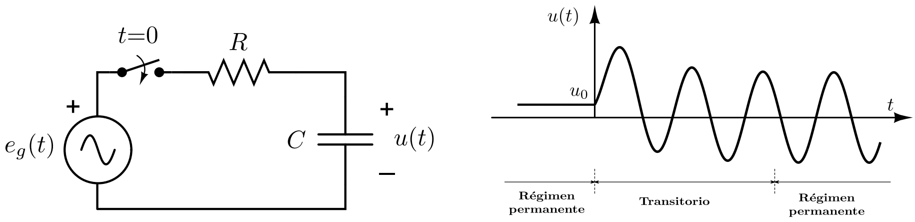



**Figura 1.2.** Conexión de un circuito RC a una fuente de corriente alterna.

En general, la transición de un régimen permanente a otro diferente involucra un periodo transitorio. Estos procesos transitorios pueden tener su origen en diversas acciones, entre las que destaca la apertura y cierre de interruptores, cortocircuitos o cualquier otra variación de la topología o de los parámetros del circuito.

## 1.2. Circuitos de primer orden

Los circuitos de primer orden son aquellos en los que cualquier tensión o intensidad se obtiene a partir de una ecuación diferencial de primer orden. En general, son de primer orden:

- Los circuitos en los que solamente existe un único elemento almacenador de energía eléctrica: bobina o condensador, Figura 1.3.

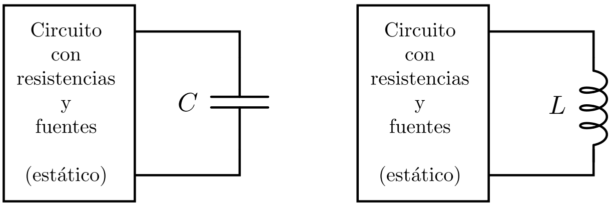



**Figura 1.3.** Circuitos de primer orden con un único elemento almacenador de energía.

- Los circuitos en los que existiendo varios elementos almacenadores de energía del mismo tipo se pueden transformar en uno solo equivalente, Figura 1.4 y Figura 1.5.

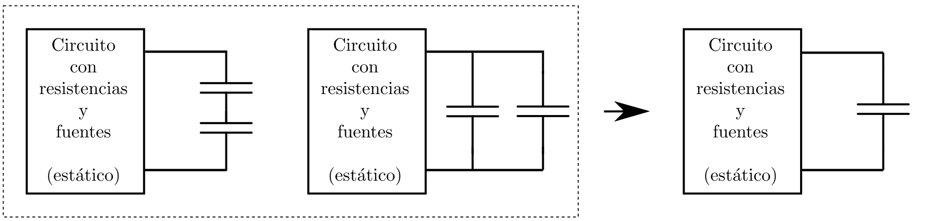



**Figura 1.4.** Circuito con dos condensadores conectados en serie y en paralelo.

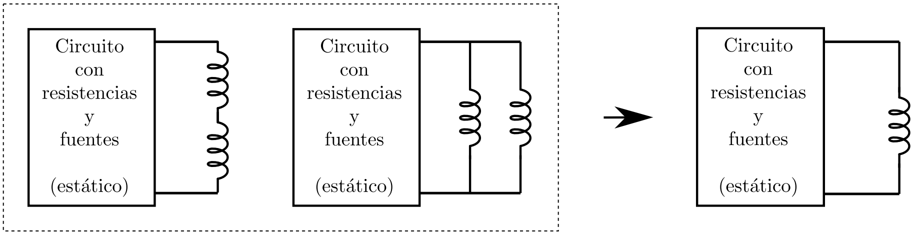



**Figura 1.5.** Circuito con dos bobinas conectadas en serie y en paralelo.

### 1.2.1. Circuito RC

En primer lugar se considerarán los circuitos de primer orden en los que solo existe un condensador o varios que pueden sustituirse por un único equivalente. Al existir un único condensador, el resto del circuito estará formado por fuentes y resistencias, pudiendo ser sustituido por su equivalente de Thévenin, como se muestra en la Figura 1.6. De esta forma, el estudio del circuito RC serie, excitado por una fuente de tensión, engloba a todos los circuitos de primer orden cuyo elemento almacenador es un condensador.

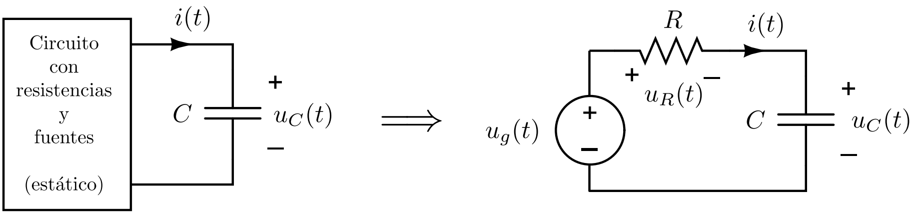



**Figura 1.6.** Circuito RC y su equivalente Thévenin.

A continuación se obtendrá la ecuación diferencial que define el comportamiento de las distintas variables del circuito de la Figura 1.6.

**Ecuación diferencial de la tensión del condensador**

Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones:

$$u_C(t) + u_R(t) = u_g(t) \tag{1.1}$$

Teniendo en cuenta la ley de Ohm en la resistencia:

$$u_C(t) + R \cdot i(t) = u_g(t) \tag{1.2}$$

Usando la ecuación de definición del condensador

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \tag{1.3}$$

y tras ordenar términos, resulta:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{u_g(t)}{RC} \tag{1.4}$$

**Ecuación diferencial de la intensidad**

Derivando la ecuación (1.2) se obtiene:

$$\frac{du_C(t)}{dt} + R\frac{di(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \tag{1.5}$$

Usando la ecuación de definición del condensador (1.3)

$$\frac{i(t)}{C} + R\frac{di(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \tag{1.6}$$

y reordenando términos, se llega a:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = \frac{1}{R}\frac{du_g(t)}{dt} \tag{1.7}$$

**Ecuación diferencial de la tensión en la resistencia**

Si se deriva la ecuación (1.1):

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \tag{1.8}$$

y usando la ecuación de definición del condensador (1.3), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{i(t)}{C} + \frac{du_R(t)}{dt} = \frac{du_g(t)}{dt} \tag{1.9}$$

Finalmente, aplicando la ley de Ohm en la resistencia y ordenando términos, se tiene que:

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC}u_R(t) = \frac{du_g(t)}{dt} \tag{1.10}$$

Observando las ecuaciones diferenciales obtenidas para cada una de las variables, (1.4), (1.7) y (1.10), puede comprobarse que todas ellas poseen los mismos coeficientes y solo difieren en el término independiente.

### 1.2.2. Circuito RL

Se consideran ahora los circuitos de primer orden que poseen una bobina o varias que pueden ser agrupadas en una sola equivalente. El resto del circuito estará formado exclusivamente por fuentes y resistencias, no existiendo más elementos almacenadores de energía. Este parte del circuito puede ser sustituido por su equivalente de Norton, que estará formado por una fuente de intensidad en paralelo con una resistencia, como se muestra en la Figura 1.7.

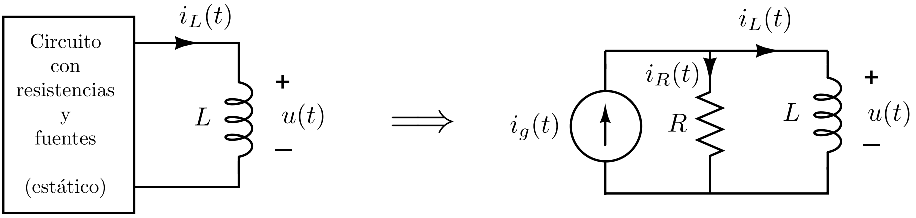



**Figura 1.7.** Circuito RL y su equivalente Norton.

A continuación se obtendrá la ecuación diferencial que define el comportamiento de las distintas variables del circuito RL paralelo excitado con fuente de intensidad de la Figura 1.7.

**Ecuación de la intensidad por la bobina**

Aplicando la ley de Kirchhoff de intensidades:

$$i_L(t) + i_R(t) = i_g(t) \tag{1.11}$$

Considerando la ley de Ohm en la resistencia

$$i_L(t) + \frac{u(t)}{R} = i_g(t) \tag{1.12}$$

y teniendo en cuenta la ecuación de definición de la bobina

$$u(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \tag{1.13}$$

finalmente resulta, tras reordenar términos:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_L(t) = \frac{R}{L}i_g(t) \tag{1.14}$$

**Ecuación de la tensión del circuito**

Derivando la ecuación (1.12) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{1}{R}\frac{du(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.15}$$

Usando la ecuación de definición de la bobina (1.13)

$$\frac{u(t)}{L} + \frac{1}{R}\frac{du(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.16}$$

y reordenando términos, se llega a:

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{R}{L}u(t) = R\frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.17}$$

**Ecuación de la intensidad en la resistencia**

Derivando la ecuación (1.11)

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{di_R(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.18}$$

y usando la ecuación de definición de la bobina (1.13), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{u(t)}{L} + \frac{di_R(t)}{dt} = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.19}$$

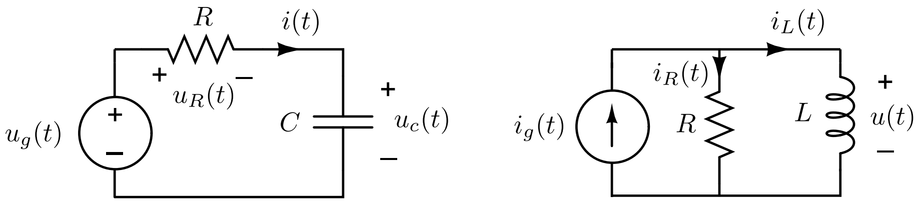
Finalmente, aplicando la ley de Ohm en la resistencia y después de ordenar los términos, resulta:

$$\frac{di_R(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_R(t) = \frac{di_g(t)}{dt} \tag{1.20}$$

Puede observarse que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales obtenidas para cada una de las variables, (1.14), (1.17) y (1.20), son los mismos en todos los casos y solo difieren en el término independiente. Esto permite escribir una ecuación genérica para todas ellas.

### 1.2.3. Ecuación diferencial genérica de un circuito de primer orden

En la Figura 1.8 se muestran las ecuaciones diferenciales de todas las variables de los circuitos RC y RL obtenidas en los apartados anteriores.




$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{u_g(t)}{RC} \qquad \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{R}{L} i_g(t)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = \frac{1}{R}\frac{du_g(t)}{dt} \qquad \frac{du(t)}{dt} + \frac{R}{L} u(t) = R\frac{di_g(t)}{dt}$$

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_R(t) = \frac{du_g(t)}{dt} \qquad \frac{di_R(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_R(t) = \frac{di_g(t)}{dt}$$

**Figura 1.8.**

Según la Figura 1.8, puede observarse que todas las ecuaciones pueden expresarse de la forma genérica

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} f(t) = g(t) \tag{1.21}$$

donde $f(t)$ denota la tensión o intensidad considerada, $g(t)$ es una función relacionada con la fuente excitación del circuito y $\tau$ es una constante que depende de los parámetros de los elementos pasivos del circuito. La constante $\tau$ se denomina constante de tiempo, y su unidad en el SI es el segundo. Esta constante es característica de cada circuito y su valor es:

- Circuito RC: $\tau$=$R{\cdot}C$
- Circuito RL: $\tau$=$L/R$

Debe tenerse en cuenta que, si en el circuito de primer orden existen varios condensadores que pueden agruparse en uno solo, $C$ representa la capacidad equivalente. Análogamente, $L$ representa el coeficiente de autoinducción de la bobina equivalente. Por último, $R$ es la resistencia equivalente del circuito pasivo visto desde los terminales de $L$ o de $C$. Por tanto, en el caso más general:

- Circuito RC: $\tau$=$R_{eq}{\cdot}C_{eq}$
- Circuito RL: $\tau$=$L_{eq}/R_{eq}$

## 1.3. Respuesta transitoria de los circuitos de primer orden

Como se ha expuesto, todas las tensiones e intensidades de los circuitos de primer orden vienen dadas por la ecuación diferencial lineal de primer orden de coeficientes constantes:

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = g(t) \tag{1.22}$$

La solución de esta ecuación servirá para obtener la respuesta transitoria de las distintas variables del circuito. Matemáticamente, la solución general de la ecuación diferencial puede expresarse como la suma de la solución general de la ecuación homogénea más una solución particular de la ecuación completa. En los circuitos eléctricos, la solución de la homogénea es conocida como respuesta natural del circuito, mientras que a la solución particular se la conoce como respuesta forzada o de régimen permanente. Por tanto, la solución de la ecuación diferencial (1.22) puede expresarse como

$$f(t) = f_n(t) + f_p(t) \tag{1.23}$$

donde $f_n(t)$ es la respuesta natural del circuito y $f_p(t)$ es la respuesta forzada o de régimen permanente. A continuación se describe cómo determinar cada una de ellas.

### 1.3.1. Respuesta natural

La respuesta natural se corresponde matemáticamente con la solución de la ecuación diferencial homogénea, es decir, de la ecuación igualada a cero

$$\frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}f(t) = 0 \tag{1.24}$$

cuya solución, para $t \geq 0$ es:

$$f_n(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.25}$$

Cabe señalar que en la ecuación homogénea (1.24) no aparece el término $g(t)$, que era el término debido a la fuente de excitación. Por tanto, la solución de esta ecuación es la respuesta de circuito si se anulasen las fuentes de excitación, de ahí que reciba el nombre de respuesta natural del circuito.

La respuesta natural de un circuito de primer orden es una exponencial cuya tasa de decrecimiento viene marcada por el valor de la constante de tiempo, $\tau$. En la Figura 1.9, puede observarse que cuando ha transcurrido un tiempo igual al valor de la constante de tiempo, la respuesta natural se ha reducido de su valor inicial, $K$, a $0{,}368K$, es decir, se ha reducido un $63{,}2\,\%$ de su valor inicial. Aunque matemáticamente la respuesta natural no desaparece nunca en el tiempo, en la práctica puede considerarse que cuando el tiempo trascurrido es igual a $5\tau$, la respuesta natural es despreciable, ya que tiene un valor de solo $0{,}007K$.

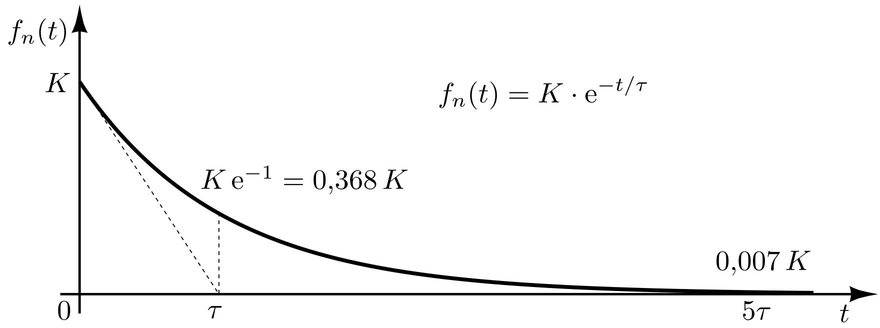



**Figura 1.9.** Constante de tiempo. Decrecimiento de la respuesta natural.

En la Figura 1.10 puede observarse cómo un mayor valor de la constante tiempo se corresponde con una mayor duración de la respuesta natural.

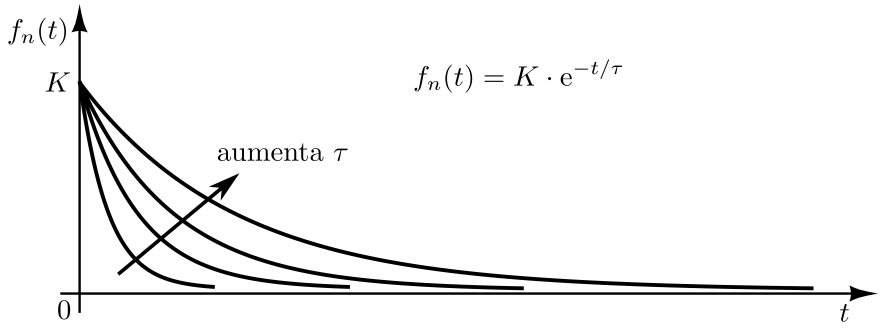



**Figura 1.10.** Influencia de la constante de tiempo sobre la respuesta natural.

### 1.3.2. Respuesta forzada o de régimen permanente

La respuesta forzada se corresponde matemáticamente con una solución particular de la ecuación diferencial completa. Esta solución particular es normalmente del mismo tipo que el término independiente $g(t)$, lo que significa que, en este caso, es del mismo tipo que la excitación del circuito. Ya que la respuesta natural tiende a cero, la respuesta forzada es la que permanece en el tiempo, de ahí que en los circuitos eléctricos se le conozca también como respuesta en régimen permanente.

Para obtener una solución particular de una ecuación diferencial de coeficientes constantes pueden utilizarse diferentes métodos matemáticos, como variación de los parámetros y coeficientes indeterminados, entre otros. Sin embargo, para los circuitos eléctricos con excitaciones de continua y de alterna se han estudiado técnicas específicas para la obtención del régimen permanente. Por ello, la respuesta forzada se obtendrá utilizando dichas técnicas.

### 1.3.3. Respuesta completa

Conocidas la respuesta natural y la respuesta de régimen permanente, la respuesta completa será:

$$f(t) = f_n(t) + f_p(t) = K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} + f_p(t) \tag{1.26}$$

Si se ha obtenido la respuesta en régimen permanente, $f_p(t)$, y se ha determinado la constante de tiempo del circuito, $\tau$, solo queda calcular el valor de la constante $K$ para tener completamente definida la respuesta completa de la variable considerada.

El valor de la constante $K$ se obtiene a partir del valor inicial de la variable, es decir, a partir de $f(0^+)$. Así, en $t$=$0^+$ se verifica que

$$f(0^+) = K + f_p(0^+) \tag{1.27}$$

de donde

$$K = f(0^+) - f_p(0^+) \tag{1.28}$$

Con lo que finalmente se obtiene lo siguiente:

$$f(t) = f_p(t) + \left[f(0^+) - f_p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{1.29}$$

Esta expresión permite obtener la tensión o intensidad de cualquier elemento de un circuito de primer orden, donde:

- $f(t)$ es la variable tensión o intensidad considerada.
- $f_p(t)$ es la respuesta en régimen permanente de dicha variable.
- $f_p(0^+)$ es el valor en $t$=$0^+$ de la respuesta en régimen permanente.
- $\tau$ es la constante de tiempo del circuito.
- $f(0^+)$ es el valor inicial de la variable.

En el apartado siguiente se mostrará cómo calcular $f(0^+)$ en los circuitos de primer orden.

### 1.3.4. Condiciones iniciales

La transición de un régimen permanente a otro diferente involucra, en general, un periodo transitorio. En este periodo transitorio se produce una redistribución de la energía almacenada en bobinas y condensadores, y un cambio en el estado energético de las fuentes. La redistribución de energía no puede tener lugar instantáneamente, lo que implica que, en ausencia de respuestas de tipo impulsional, se cumple que:

- La tensión en el condensador no puede sufrir discontinuidades:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-)$$

- La intensidad en la bobina no puede sufrir discontinuidades:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Teniendo en cuenta estas premisas, puede calcularse el valor inicial de cualquier tensión o intensidad, $f(0^+)$, resolviendo el circuito en el que:

**1.** Las fuentes de excitación, $e_g(t)$ e $i_g(t)$, se sustituyen por sendas fuentes de valor constante:

$$E_g = e_g(0^+) \;\; ; \;\; I_g = i_g(0^+)$$

**2.** En el caso de un circuito RC, el condensador se sustituye por una fuente de tensión de valor:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

**3.** En el caso de un circuito RL, la bobina se sustituye por una fuente de intensidad de valor:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$$

En la Figura 1.11 se ha sintetizado el procedimiento a seguir, en el caso de un circuito con condensador, para obtener el circuito en $t$=$0^+$ que permite calcular los valores iniciales de cualquier variable. Análogamente, en la la Figura 1.12, se muestra el procedimiento para el caso de un circuito con bobina.

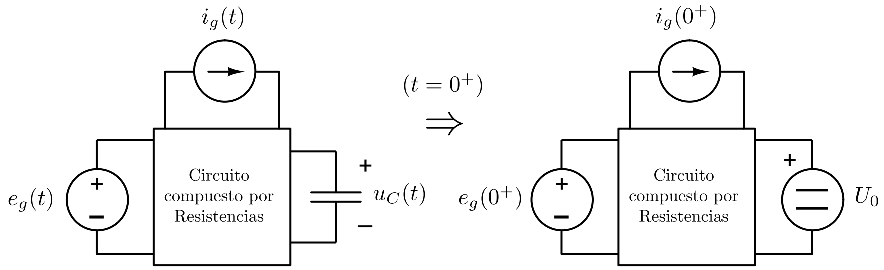



**Figura 1.11.** Obtención del circuito en $t$=$0^+$. Circuito con condensador.

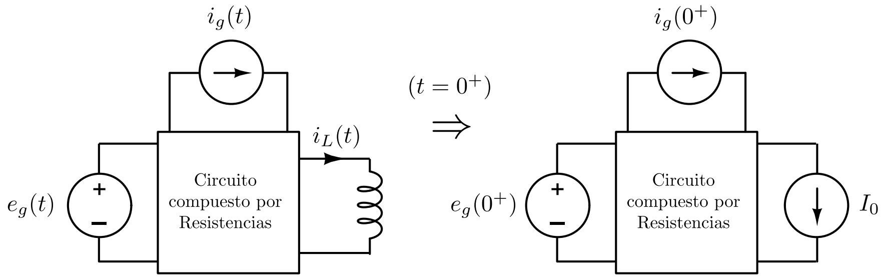



**Figura 1.12.** Obtención del circuito en $t$=$0^+$. Circuito con bobina.

## 1.4. Generalización de la respuesta transitoria

Hasta ahora se ha considerado que el periodo transitorio objeto de análisis comienza en el instante $t$=0. No obstante, el estudio desarrollado en apartados anteriores puede generalizarse a cualquier instante $t$=$t_0$. Esto será de gran utilidad cuando se quieran analizar varios transitorios concatenados que comienzan en diferentes instantes. Para ello, teniendo en cuenta que se trata de sistemas invariantes en el tiempo, si el transitorio comenzara en $t$=$t_0$, la respuesta completa sería:

$$f(t) = f_p(t) + \left[f(t_0^+) - f_p(t_0^+)\right] \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau} \tag{1.30}$$

Igualmente, para el cálculo de la condiciones iniciales, debe tenerse en cuenta que, en ausencia de respuestas de tipo impulsional:

- La tensión en el condensador no puede sufrir discontinuidades:

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-) \tag{1.31}$$

- La intensidad en la bobina no puede sufrir discontinuidades:

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) \tag{1.32}$$

Teniendo en cuenta estas premisas, puede calcularse el valor inicial de cualquier tensión o intensidad, $f(t_0^+)$, resolviendo el circuito en el que:

1. Las fuentes de excitación, $e_g(t)$ e $i_g(t)$, se sustituyen por sendas fuentes de valor constante:

$$E_g = e_g(t_0^+) \;\; ; \;\; I_g = i_g(t_0^+)$$

2. En el caso de un circuito RC, el condensador se sustituye por una fuente de tensión de valor:

$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-) = U_{t_0}$$

3. En el caso de un circuito RL, la bobina se sustituye por una fuente de intensidad de valor:

$$i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-) = I_{t_0}$$

La Figura 1.13 y la Figura 1.14 resumen el procedimiento a seguir para obtener el circuito en $t{=}t_0^+$ que permite obtener los valores iniciales de cualquier variable en dicho instante.

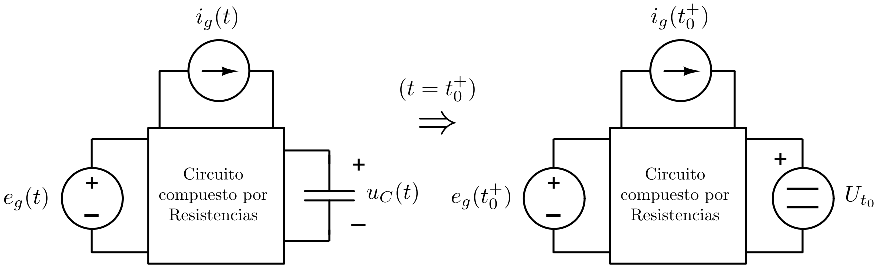



**Figura 1.13.** Obtención del circuito en $t{=}t_0^+$. Circuito con condensador.

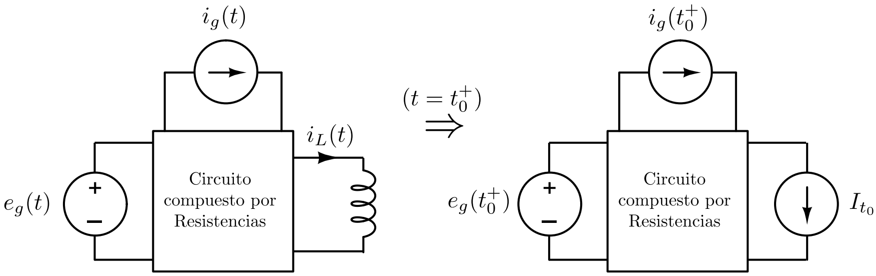



**Figura 1.14.** Obtención del circuito en $t{=}t_0^+$. Circuito con bobina.

## 1.5. Procedimiento para obtención de la respuesta de un circuito de primer orden

A modo de resumen, se enumeran los pasos a seguir para obtener la tensión o intensidad de cualquier elemento de un circuito de primer orden durante un transitorio que comience en $t_0^+$. Si denotamos por $f(t)$ la variable que se desea calcular, esta vendrá dada por:

$$f(t) = f_p(t) + \left[f(t_0^+) - f_p(t_0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-(t-t_0)/\tau} \tag{1.33}$$

Cada uno de los términos de la expresión anterior se calculan como sigue:

**1.** Determinar la respuesta de la variable en régimen permanente, $f_p(t)$ para $t{\geq}t_0$. Para este punto puede utilizarse cualquiera de las técnicas conocidas de análisis de circuitos en régimen permanente en corriente continua o alterna, según sean las fuentes del circuito. Para obtener $f_p(t_0^+)$ basta con sustituir $t{=}t_0$ en la expresión de $f_p(t)$ obtenida. En el caso de que el circuito para $t{\geq}t_0$ no posea fuentes de excitación independientes, $f_p(t)$ será nula.

2. Determinar la constante de tiempo del circuito, $\tau$, para $t \geq t_0$. El valor de esta constante viene dado por $\tau = R_{eq} C_{eq}$ (o $\tau = L_{eq}/R_{eq}$), si el circuito posee condensadores (o bobinas). En primer lugar se obtendrá el circuito pasivo anulando las fuentes independientes y se asociarán todos los condensadores (bobinas) en uno equivalente. Si esto no fuera posible, no se trata de un circuito de primer orden. A continuación se determinará la resistencia equivalente del circuito desde los extremos del condensador equivalente (bobina equivalente).

3. Determinar $f(t_0^+)$, valor inicial de la variable considerada. Sea cual sea la variable que queremos determinar para $t \geq t_0$, es necesario conocer la tensión del condensador $u_C(t_0^-)$ (intensidad de la bobina $i_L(t_0^-)$) justo antes de comenzar el transitorio, instante $t_0^-$. Esta variable es, en principio, la única que se mantiene constante desde $t_0^-$ a $t_0^+$. Conocido este valor, se podrá analizar el circuito en $t=0^+$, donde el condensador (bobina) se sustituye por una fuente de tensión (intensidad) de valor $u_C(t_0^-)$ ($i_L(t_0^-)$). Además, todas la fuentes independientes se sustituyen por fuentes de valor constante e igual al valor de la fuente en $t=t_0^+$.

Cabe señalar que los tres pasos anteriores son independientes entre sí, por lo que el orden puede alterarse libremente. Con ello, se habrán determinado todos los términos que constituyen la respuesta completa de la variable buscada.

**Ejemplo 1.5.1.** En el circuito de la Figura 1.15, en $t=0$ se cierra el interruptor. Calcular la tensión $u_C(t)$ y la intensidad $i(t)$ para $t>0$, sabiendo que $u_C(0^-)=4$ V.

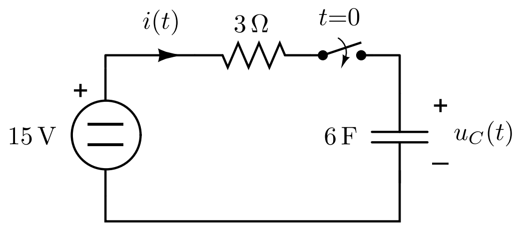



**Figura 1.15.**

***Solución.*** Al tratarse de un circuito de primer orden, la tensión $u_C(t)$ y la intensidad $i(t)$ vendrán expresadas por:

$$u_C(t) = u_C^p(t) + \left[u_C(0^+) - u_C^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$$
$$i(t) = i^p(t) + \left[i(0^+) - i^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

A continuación se determinará la respuesta en régimen permanente, la constante de tiempo y la condición inicial de estas variables.

**Respuesta en régimen permanente**. En este caso, una vez cerrado el interruptor, la única fuente de excitación es de corriente continua, por lo que habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.16, donde el condensador se ha sustituido por un circuito abierto.

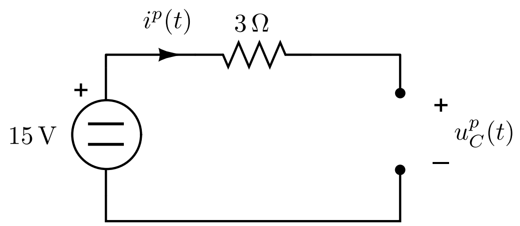



**Figura 1.16.** Circuito en régimen permanente de corriente continua.

Resolviendo el circuito de la Figura 1.16 se obtienen las magnitudes en régimen permanente:

$$i^p(t) = 0\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; u_C^p(t) = 15\,\mathrm{V}$$

Asimismo:

$$i^p(0^+) = 0\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; u_C^p(0^+) = 15\,\mathrm{V}$$

**Constante de tiempo**. Al ser un circuito de tipo RC, la constante de tiempo es la siguiente:

$$\tau = RC = 3 \cdot 6 = 18\,\mathrm{s}$$

**Condiciones iniciales**. Según el enunciado, antes de cerrar el interruptor la tensión del condensador es $u_C(0^-)$=4 V. Para obtener las condiciones iniciales se empleará el circuito en el instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez cerrado el interruptor, sustituyendo en este caso el condensador por una fuente de tensión de valor $u_C(0^+)$. Salvo respuesta de tipo impulsional, la tensión en el condensador no varía al cerrar interruptor, por tanto:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 4\,\mathrm{V}$$

El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.17.

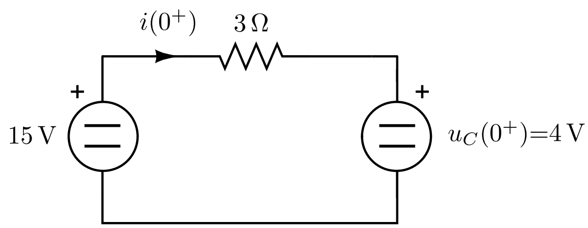



**Figura 1.17.** Circuito en $t$=$0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.17 es fácil obtener $i(0^+)$:

$$i(0^+) = \frac{15-4}{3} = \frac{11}{3}\,\mathrm{A}$$

En consecuencia, $i(t)$ y $u_C(t)$ para $t>0$ son las siguientes:

$$u_C(t) = u_C^p(t) + \left[u_C(0^+) - u_C^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 15 + [4 - 15] \cdot \mathrm{e}^{-t/18} = 15 - 11 \cdot \mathrm{e}^{-t/18}\,\mathrm{V}$$

$$i(t) = i^p(t) + \left[i(0^+) - i^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 0 + \left[\frac{11}{3} - 0\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/18} = \frac{11}{3} \cdot \mathrm{e}^{-t/18}\,\mathrm{A}$$

**Ejemplo 1.5.2.** En el circuito de la Figura 1.18, en $t$=0 se cierra el interruptor. Sabiendo que $i_g(t)$=$20\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(5t + 45°)$ A, calcular la intensidad $i_R(t)$ para $t$>0.

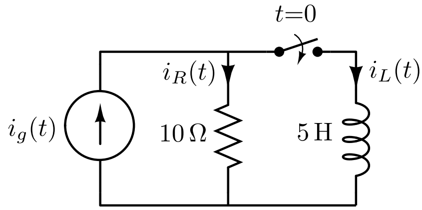



**Figura 1.18.**

***Solución.*** Al tratarse de un circuito de primer orden, la intensidad $i_R(t)$ vendrá dada por:

$$i_R(t) = i_R^p(t) + \left[i_R(0^+) - i_R^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

A continuación se determinará la respuesta en régimen permanente, la constante de tiempo y la condición inicial de esta variable.

**Respuesta en régimen permanente**. En este caso, una vez que el interruptor se cierra, la única fuente de excitación en el circuito resultante es de corriente alterna. Por ello, habrá que resolver el circuito en régimen permanente de alterna, para lo cual se usará el circuito en el dominio fasorial mostrado en la Figura 1.19.

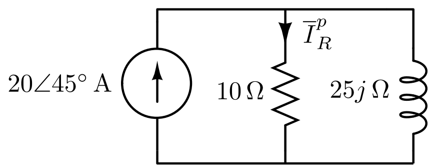



**Figura 1.19.** Circuito en régimen permanente de alterna.

Resolviendo el circuito de la Figura 1.19 se obtiene:

$$\overline{I}_R^p = 20\angle 45° \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{25j}} = 20\angle 45° \frac{25j}{10 + 25j} \approx 18{,}57\angle 66{,}8°\,\mathrm{A}$$

Una vez obtenida la intensidad en régimen permanente en el dominio fasorial, se obtendrá la intensidad en régimen permanente en el dominio temporal:

$$i_R^p(t) = 18{,}57\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(5t + 66{,}8^\circ)\,\mathrm{A}$$

cuyo valor para $t$=$0^+$ es el siguiente:

$$i_R^p(0^+) = 18{,}57\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(66{,}8^\circ) \approx 24{,}14\,\mathrm{A}$$

**Constante de tiempo**. Al ser un circuito RL, la constante de tiempo (para $t$>0) es la siguiente:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}\,\mathrm{s}$$

**Condiciones iniciales**. Antes de cerrar el interruptor no circula intensidad por la bobina, por lo que $i_L(0^-)$=0 A. Para obtener la condición inicial se empleará el circuito correspondiente al instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez cerrado el interruptor, sustituyendo, en este caso, la bobina por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+)$. Salvo respuesta de tipo impulsional, la intensidad de una bobina no varía al cerrar interruptor, por tanto:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\,\mathrm{A}$$

Además, la fuente de alterna $i_g(t)$ se sustituye por una fuente de valor constante igual a $i_g(0^+)$, que en este caso es:

$$i_g(0^+) = 20\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(0 + 45^\circ) = 20\,\mathrm{A}$$

El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.20.

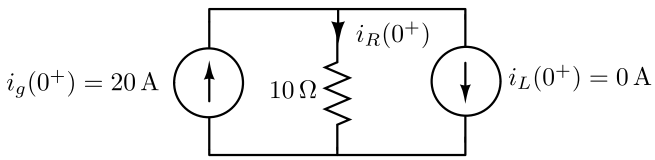



**Figura 1.20.** Circuito en $t$=$0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.20 es fácil obtener $i_R(0^+)$:

$$i_R(0^+) = 20\,\mathrm{A}$$

Finalmente, la intensidad $i_R(t)$ para $t$>0 es la siguiente:

$$\begin{aligned} i_R(t) &= i_R^p(t) + \left[i_R(0^+) - i_R^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \\ &= 18{,}57\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(5t + 66{,}8^\circ) + [20 - 24{,}14] \cdot \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

## 1.6. Casos que provocan impulsos

Como se ha indicado anteriormente, las tensiones de los condensadores y las intensidades de las bobinas no pueden sufrir discontinuidades en ausencia de respuestas de tipo impulsional. Sin embargo, en determinadas situaciones estas variables pueden sufrir una discontinuidad de tipo salto, apareciendo un escalón en su evolución, llevando asociada una respuesta impulsional. Estas situaciones son dos:

- Conexión en paralelo de condensadores con distinta tensión inicial.
- Conexión en serie de bobinas con distinta intensidad inicial.

### 1.6.1. Condensadores en paralelo

Considérese el circuito de la Figura 1.21 donde los condensadores $C_1$ y $C_2$ se conectarán en paralelo al cerrarse el interruptor en $t{=}t_0$. En el instante $t_0^-$, justo antes de cerrar el interruptor, los condensadores se encuentran cargados a diferente tensión, $u_1(t_0^-){\neq}u_2(t_0^-)$. Al cerrar el interruptor, ambos condensadores quedan en paralelo y necesariamente tendrán que igualar sus tensiones, es decir, $u_1(t_0^+){=}u_2(t_0^+){=}u(t_0^+)$. En este caso no se puede aplicar, como se ha hecho hasta ahora, que la tensión de cada condensador se mantiene desde el instante $t_0^-$ al instante $t_0^+$.

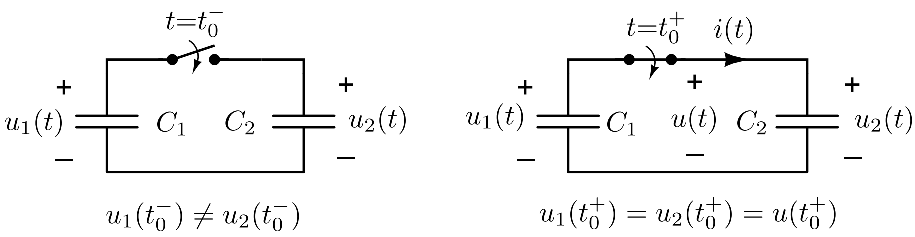



**Figura 1.21.** Conexión de dos condensadores en paralelo.

Para obtener el valor de la tensión común de los dos condensadores en $t_0^+$ se aplica el principio de conservación de carga, el cual establece que la carga total en un sistema aislado es constante. Esto implica que la carga total almacenada no puede cambiar bruscamente. De esta forma:

$$\Sigma q_i(t_0^-) = \Sigma q_i(t_0^+) \quad \Rightarrow \quad C_1 u_1(t_0^-) + C_2 u_2(t_0^-) = (C_1 + C_2)\, u(t_0^+) \tag{1.34}$$

Por tanto, la tensión que tendrán ambos condensadores en $t_0^+$ será:

$$u(t_0^+) = \frac{C_1 u_1(t_0^-) + C_2 u_2(t_0^-)}{C_1 + C_2} \tag{1.35}$$

A partir de ese instante, puede considerarse que el circuito posee un solo condensador de capacidad $C_{eq}{=}C_1{+}C_2$ cargado a la tensión $u(t_0^+)$.

Aunque la carga total se conserva, existe un transvase de carga desde un condensador a otro en un tiempo infinitesimal. Esto solo puede conseguirse si la intensidad que circula es muy elevada, concretamente de tipo impulsional. La intensidad que circula en el instante de cerrar el interruptor se puede calcular teniendo en cuenta la ecuación del condensador $C_2$:

$$i(t) = C_2 \frac{du_2(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t)dt = C_2 du_2(t) \tag{1.36}$$

Integrando ambos miembros entre $t_0^+$ y $t_0^-$ resulta:

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} i(t)dt = C_2 \int_{t_0^-}^{t_0^+} du_2(t) = C_2 u(t_0^+) - C_2 u_2(t_0^-) \neq 0 \tag{1.37}$$

Teniendo en cuenta que la función delta de Dirac o impulso unitario satisface las siguientes propiedades

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si } t \neq t_0 \end{cases} \qquad \int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0)dt = 1 \tag{1.38}$$

se deduce que el valor de la intensidad será:

$$i(t) = C_2 \left( u(t_0^+) - u_2(t_0^-) \right) \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.39}$$

Si en lugar de dos condensadores, se tienen $n$ condensadores con diferentes tensiones iniciales que se conectan en paralelo en un instante $t_0$, la tensión de todos ellos en $t_0^+$ viene dada por:

$$u(t_0^+) = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i u_i(t_0^-)}{\sum_{i=1}^{n} C_i} \tag{1.40}$$

A partir del incremento de tensión que sufre cada condensador, puede determinarse la intensidad que circula por él en $t_0$ según:

$$i_i(t) = C_i \left( u(t_0^+) - u_i(t_0^-) \right) \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.41}$$

En esta última ecuación se han supuesto referencias pasivas, es decir, que la intensidad calculada es la que circula del terminal positivo al negativo de la tensión.

### 1.6.2. Bobinas en serie

En el circuito de la Figura 1.22 se tienen dos bobinas por las que circulan sendas intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Al abrirse el interruptor, las bobinas quedarán conectadas en serie siendo, por tanto, la misma intensidad para ambas. Si en el instante $t_0^-$ las intensidades tienen valores diferentes, $i_1(t_0^-) \neq i_2(t_0^-)$, cuando se cierre el interruptor las bobinas no podrán mantener estos valores ya que debe cumplirse que $i_1(t_0^+) = i_2(t_0^+) = i(t_0^+)$. En esta caso no se puede considerar, como se ha hecho hasta ahora, que la intensidad de las bobinas se mantienen desde el instante $t_0^-$ al instante $t_0^+$.

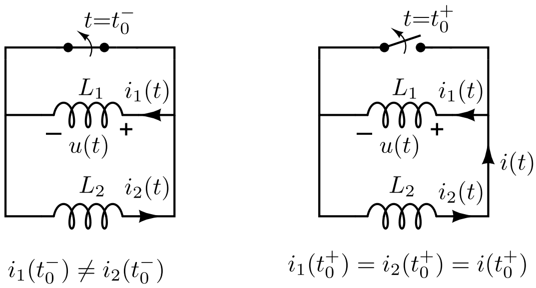



**Figura 1.22.** Conexión de dos bobinas en serie.

Para obtener el valor de la intensidad inmediatamente después de cerrar el interruptor, se tendrá en cuenta el principio de conservación de flujo, el cual establece que los enlaces de flujos no pueden cambiar bruscamente:

$$\Sigma N_i \phi_i(t_0^-) = \Sigma N_i \phi_i(t_0^+) \quad \Rightarrow \quad L_1 i_1(t_0^-) + L_2 i_2(t_0^-) = (L_1 + L_2)\, i(t_0^+) \tag{1.42}$$

Por tanto, la intensidad que circula por ambas bobinas en $t_0^+$ será:

$$i(t_0^+) = \frac{L_1 i_1(t_0^-) + L_2 i_2(t_0^-)}{L_1 + L_2} \tag{1.43}$$

A partir de ese instante, puede considerarse que el circuito posee una sola bobina de coeficiente de autoinducción $L_{eq}{=}L_1{+}L_2$ con intensidad inicial $i(t_0^+)$.

La discontinuidad que aparece en la intensidad de cada bobina lleva asociada una respuesta de tipo impulsional en su respectiva tensión. La tensión a la que se ve sometida la bobina $L_1$ se puede calcular teniendo en cuenta su ecuación:

$$u(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad u(t)dt = L_1 di_1(t) \tag{1.44}$$

Integrando ambos miembros entre $t_0^+$ y $t_0^-$ resulta:

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} u(t)dt = L_1 \int_{t_0^-}^{t_0^+} di_1(t) = L_1 i(t_0^+) - L_1 i_1(t_0^-) \neq 0 \tag{1.45}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la función delta de Dirac (1.38), el valor de la tensión será:

$$u(t) = L_1 \left( i(t_0^+) - i_1(t_0^-) \right) \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.46}$$

El estudio puede extenderse fácilmente a $n$ bobinas con intensidades iniciales diferentes que, en un instante determinado $t_0$, se conectan en serie. La intensidad de todas ellas en $t_0^+$ viene dada por:

$$i(t_0^+) = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i i_i(t_0^-)}{\sum_{i=1}^{n} L_i} \tag{1.47}$$

Finalmente, a partir del incremento de intensidad que sufre la intensidad de cada bobina, puede determinarse la tensión a la que se ve sometida cada una de ellas en $t_0$:

$$u_i(t) = L_i \left( i(t_0^+) - i_i(t_0^-) \right) \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.48}$$

En esta última ecuación se han supuesto referencias pasivas para la tensión e intensidad de cada bobina.

# Problemas resueltos

## P. 1.1. RC con excitación de continua

En el circuito de la Figura 1.23, el condensador se encuentra descargado cuando en $t$=0 se cierra el interruptor. Calcular la tensión $u_C(t)$ y la intensidad $i(t)$ para $t$>0.

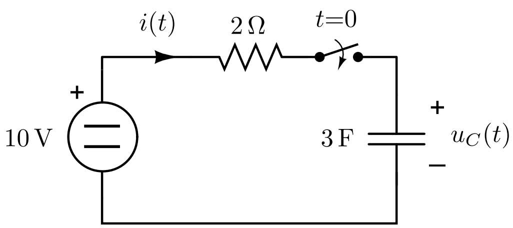



**Figura 1.23.**

***Solución.***

Según el enunciado, antes de cerrar el interruptor, es decir, para $t$=$0^-$, el condensador está descargado. Esto significa que $u_C(0^-)$=0 V. Para obtener las condiciones iniciales se empleará el circuito en el instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez cerrado el interruptor, sustituyendo en este caso el condensador por una fuente de tensión de valor $u_C(0^+)$. Salvo respuesta de tipo impulsional, la tensión en el condensador no varía al cerrar interruptor, por tanto:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\,\mathrm{V}$$

El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.24, a partir del cual es fácil obtener $i(0^+)$:

$$i(0^+) = \frac{10}{2} = 5\,\mathrm{A}$$

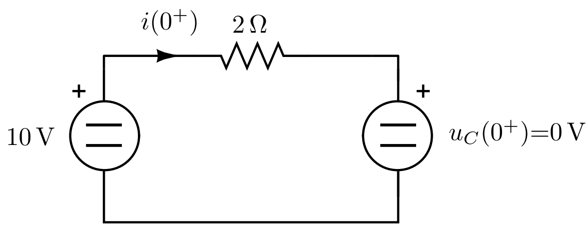



**Figura 1.24.** Circuito en $t$=$0^+$.

A continuación se obtendrán las magnitudes de interés en régimen permanente. En este caso, una vez cerrado el interruptor, la única fuente de excitación es de corriente continua, por lo que habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.25, donde el condensador se ha sustituido por un circuito abierto.

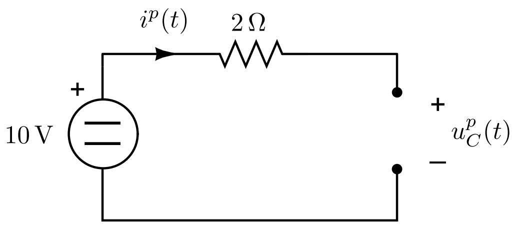



**Figura 1.25.** Circuito en régimen permanente de corriente continua.

Resolviendo el circuito de la Figura 1.25 se obtienen las magnitudes en régimen permanente:

$$i^p(t) = 0\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; u_C^p(t) = 10\,\mathrm{V}$$

Asimismo:

$$i^p(0^+) = 0\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; u_C^p(0^+) = 10\,\mathrm{V}$$

Al ser un circuito de tipo RC, la constante de tiempo es la siguiente:

$$\tau = RC = 2 \cdot 3 = 6\,\mathrm{s}$$

En consecuencia, $i(t)$ y $u_C(t)$ para $t$>0 son las siguientes:

$$\begin{aligned}
i(t) &= i^p(t) + \left[i(0^+) - i^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \\
&= 0 + [5 - 0] \cdot \mathrm{e}^{-t/6} = 5 \cdot \mathrm{e}^{-t/6}\,\mathrm{A} \\
u_C(t) &= u_C^p(t) + \left[u_C(0^+) - u_C^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \\
&= 10 + [0 - 10] \cdot \mathrm{e}^{-t/6} = 10 - 10 \cdot \mathrm{e}^{-t/6}\,\mathrm{V}
\end{aligned}$$

## P. 1.2. RL con excitación de continua

En el circuito de la Figura 1.26 se cierra el interruptor en $t$=0. Calcular la intensidad $i_L(t)$ y $u_L(t)$ para $t$>0.

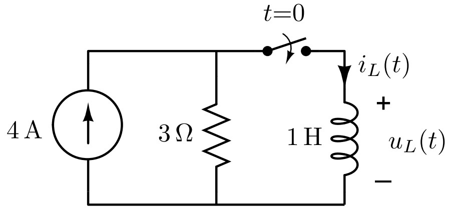



**Figura 1.26.**

***Solución.***

Antes de cerrar el interruptor no circula intensidad por la bobina, por lo que $i_L(0^-)$=0 A. Para obtener las condiciones iniciales se empleará el circuito en el instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez cerrado el interruptor, sustituyendo, en este caso, la bobina por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+)$. Salvo respuesta de tipo impulsional, la intensidad de la bobina no varía al cerrar interruptor, por tanto:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\,\mathrm{A}$$

El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.27.

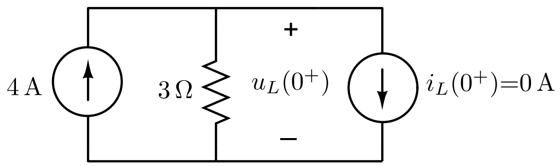



**Figura 1.27.** Circuito en $t$=$0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.27 es fácil obtener $u_L(0^+)$:

$$u_L(0^+) = 4 \cdot 3 = 12\,\mathrm{V}$$

A continuación se obtendrán las magnitudes de interés en régimen permanente. En este caso, como la única fuente de excitación es de corriente continua, habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.28, donde la bobina se ha sustituido por un cortocircuito.

Resolviendo el circuito de la Figura 1.28 se obtienen las magnitudes en régimen permanente:

$$i_L^p(t) = 4\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; u_L^p(t) = 0\,\mathrm{V}$$

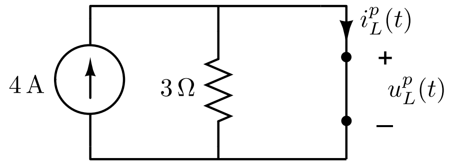



**Figura 1.28.** Circuito en régimen permanente de corriente continua.

Asimismo:

$$i_L^p(0^+) = 4\,\mathrm{A} \ ; \ u_L^p(0^+) = 0\,\mathrm{V}$$

Al ser un circuito de tipo RL, la constante de tiempo es la siguiente:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{3}\,\mathrm{s}$$

En consecuencia, $i_L(t)$ y $u_L(t)$ para $t{>}0$ son las siguientes:

$$i_L(t) = i_L^p(t) + \left[i_L(0^+) - i_L^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 4 + [0-4] \cdot \mathrm{e}^{-3t} = 4 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-3t})\,\mathrm{A}$$
$$u_L(t) = u_L^p(t) + \left[u_L(0^+) - u_L^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 0 + [12-0] \cdot \mathrm{e}^{-3t} = 12 \cdot \mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{V}$$

En la Figura 1.29 se ha representado gráficamente la evolución temporal de $i_L(t)$ y $u_L(t)$.

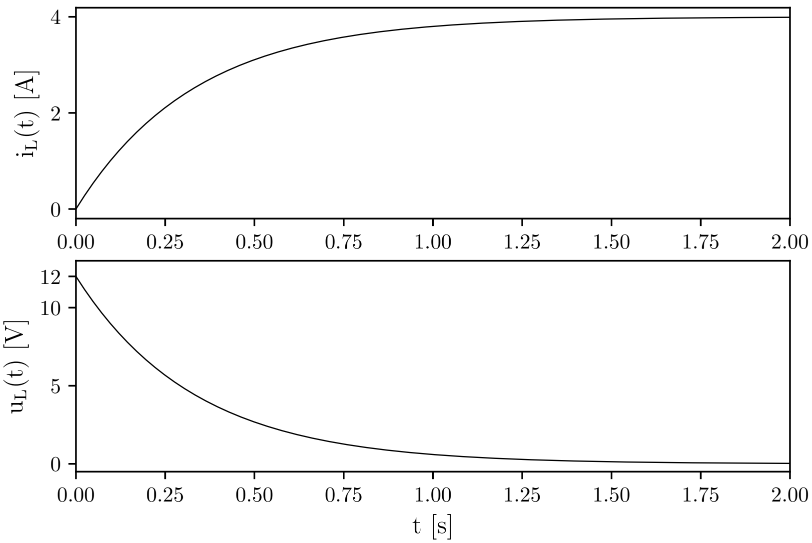



**Figura 1.29.** Evolución temporal de $i_L(t)$ y $u_L(t)$.

## P. 1.3. RC sin fuentes de excitación

El circuito de la Figura 1.30 está en régimen permanente cuando en $t$=0 se abre el interruptor. Calcular la intensidad $i_C(t)$ para $t$>0.

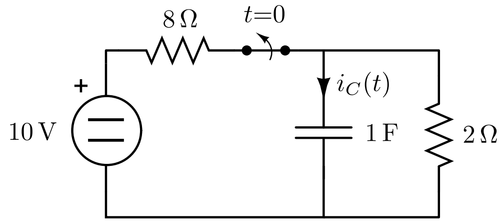



**Figura 1.30.**

***Solución.***

En primer lugar se obtendrá la tensión en el condensador antes de abrir el interruptor, es decir, para el instante $t$=$0^-$. Para ello se tendrá en cuenta que el circuito se encuentra en régimen permanente antes de que el interruptor sea abierto. Como la única fuente de excitación es de corriente continua, habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.31, donde el condensador se ha sustituido por un circuito abierto.

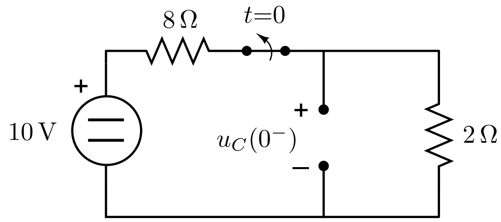



**Figura 1.31.** Circuito en $t$=$0^-$.

A partir de la Figura 1.31 se obtiene la tensión en el condensador en $t$=$0^-$:

$$u_C(0^-) = 10 \cdot \frac{2}{8+2} = 2\,\mathrm{V}$$

Salvo respuesta de tipo impulsional, la tensión en el condensador no varía al abrir el interruptor, por tanto:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 2\,\mathrm{V}$$

Para obtener la condición inicial de la intensidad $i(t)$ se empleará el circuito correspondiente al instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez abierto el interruptor, sustituyendo el condensador por una fuente de tensión de valor $u_C(0^+)$. El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.32.

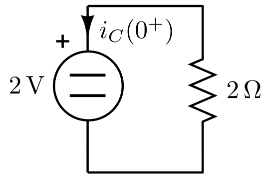



**Figura 1.32.** Circuito en $t$=$0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.32 se obtiene $i_C(0^+)$:

$$i_C(0^+) = \frac{-2}{2} = -1\,\mathrm{A}$$

A continuación se obtiene el valor de la intensidad $i_C(t)$ en régimen permanente. En este caso, una vez que el interruptor se encuentra abierto, no existe ninguna fuente de excitación en el circuito resultante, quedando únicamente conectado el condensador con la resistencia. El régimen permanente se corresponde con la respuesta forzada por las fuentes de excitación. En ese caso, al no haber fuente de excitación no hay régimen permanente. De esta forma:

$$i_C^p(t) = 0\,\mathrm{A} \;\; ; \;\; i_C^p(0^+) = 0\,\mathrm{A}$$

Al ser un circuito RC, la constante de tiempo (para $t$>0) es la siguiente:

$$\tau = RC = 2 \cdot 1 = 2\,\mathrm{s}$$

Una vez obtenida la condición inicial, la respuesta en régimen permanente y la constante de tiempo, a continuación se obtiene $i_C(t)$ para $t$>0:

$$i_C(t) = i_C^p(t) + \left[i_C(0^+) - i_C^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 0 + [-1 - 0] \cdot \mathrm{e}^{-t/2} = -1 \cdot \mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{A}$$

En la Figura 1.33 se ha representado gráficamente la evolución temporal de $i_C(t)$.

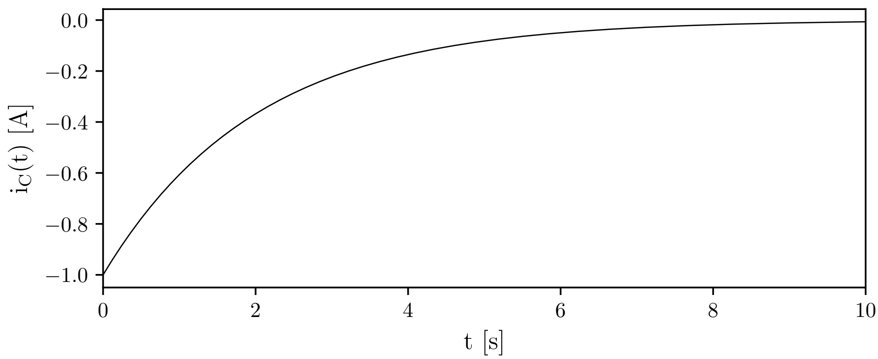



**Figura 1.33.** Evolución temporal de $i_C(t)$.

## P. 1.4. RL sin fuentes de excitación

El circuito de la Figura 1.34 está en régimen permanente cuando en $t$=0 se abre el interruptor. Calcular la intensidad $i_L(t)$ y la tensión $u_L(t)$ para $t$>0.

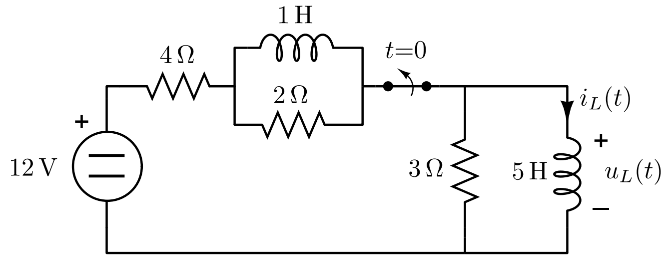



**Figura 1.34.**

***Solución.***
En primer lugar se obtendrá la intensidad por la bobina de 5 H antes de abrir el interruptor, es decir, para el instante $t$=$0^-$. Para ello se tendrá en cuenta que el circuito se encuentra en régimen permanente antes de que el interruptor sea abierto. Como la única fuente de excitación es de corriente continua, habrá que resolver el circuito correspondiente al régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.35, donde cada bobina se ha sustituido por un cortocircuito.

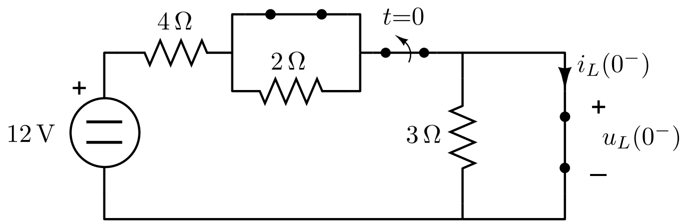



**Figura 1.35.** Circuito en $t$=$0^-$.

A partir de la Figura 1.35 se obtiene la intensidad la bobina en $t$=$0^-$:

$$i_L(0^-) = \frac{12}{4} = 3\,\mathrm{A}$$

Salvo respuesta de tipo impulsional, la intensidad en la bobina no varía al abrir el interruptor, por tanto:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 3\,\mathrm{A}$$

Para obtener la condición inicial de la intensidad $i_L(t)$ y la de la tensión $u_L(t)$ se empleará el circuito en el instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez abierto el interruptor, sustituyendo la bobina de 5 H por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+)$. El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.36.

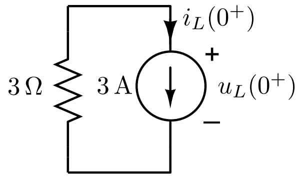



**Figura 1.36.** Circuito en $t$=$0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.36 se obtiene $i_L(0^+)$ y $u_L(0^+)$:

$$i_L(0^+) = 3\,\text{A} \ \ ; \ \ u_L(0^+) = -3 \cdot 3 = -9\,\text{V}$$

A continuación se obtiene el valor de la intensidad $i_L(t)$ y el de la tensión $u_L(t)$ en régimen permanente. En este caso, una vez que el interruptor se encuentra abierto, no existe ninguna fuente de excitación en el circuito resultante, por lo que no habrá régimen permanente. En consecuencia:

$$\begin{aligned} i_L^p(t) &= 0\,\text{A} \ \ ; \ \ u_L^p(t) = 0\,\text{V} \\ i_L^p(0^+) &= 0\,\text{A} \ \ ; \ \ u_L^p(0^+) = 0\,\text{V} \end{aligned}$$

Al ser un circuito RL, la constante de tiempo (para $t$>0) es la siguiente:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{5}{3}\,\text{s}$$

Por tanto, $i_L(t)$ y $u_L(t)$ para $t$>0 son las siguientes:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L^p(t) + \left[i_L(0^+) - i_L^p(0^+)\right] \cdot \text{e}^{-t/\tau} = 0 + [3 - 0] \cdot \text{e}^{-3t/5} = 3 \cdot \text{e}^{-3t/5}\,\text{A} \\ u_L(t) &= u_L^p(t) + \left[u_L(0^+) - u_L^p(0^+)\right] \cdot \text{e}^{-t/\tau} = 0 + [-9 - 0] \cdot \text{e}^{-3t/5} = -9 \cdot \text{e}^{-3t/5}\,\text{V} \end{aligned}$$

## P. 1.5. RL con excitación de continua

El circuito de la Figura 1.37 está en régimen permanente cuando en $t$=0 se abre el interruptor. Calcular la intensidad $i(t)$ para $t$>0.

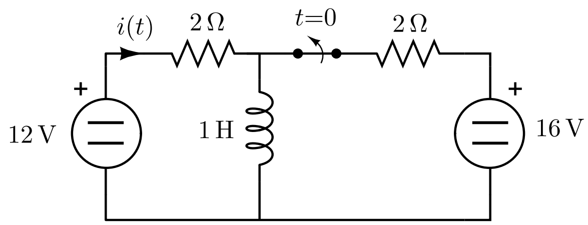



**Figura 1.37.**

***Solución.***

En primer lugar se obtendrá la intensidad por la bobina antes de abrir el interruptor, es decir, para el instante $t$=$0^-$. Para ello se tendrá en cuenta que el circuito se encuentra en régimen permanente antes de que el interruptor sea abierto. Como las fuentes de excitación son de corriente continua, habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.38, donde la bobina se ha sustituido por un cortocircuito.

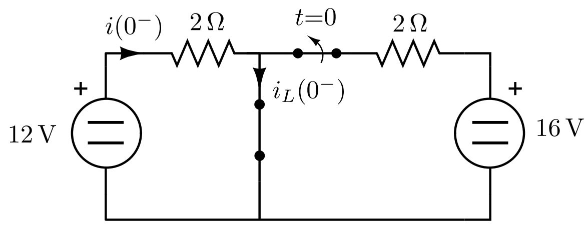



**Figura 1.38.** Circuito en $t$=$0^-$.

A partir de la Figura 1.38 se obtiene la intensidad la bobina en $t$=$0^-$:

$$i_L(0^-) = \frac{12}{2} + \frac{16}{2} = 6 + 8 = 14\,\mathrm{A}$$

Salvo respuesta de tipo impulsional, la intensidad en la bobina no varía al abrir el interruptor, por tanto:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 14\,\mathrm{A}$$

Para obtener la condición inicial de la intensidad $i(t)$ se empleará el circuito en el instante $t$=$0^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez abierto el interruptor, sustituyendo la bobina por una fuente de intensidad de valor $i_L(0^+)$. El circuito en el instante $t$=$0^+$ se muestra en la Figura 1.39.

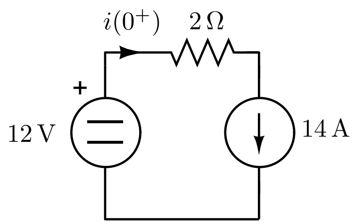



**Figura 1.39.** Circuito en $t$=$0^+$.

A partir del circuito de la Figura 1.39 se obtiene $i(0^+)$:

$$i(0^+) = 14\,\mathrm{A}$$

A continuación se obtiene el valor de la intensidad $i(t)$ en régimen permanente. En este caso, una vez que el interruptor se encuentra abierto, la única fuente de excitación, en el circuito resultante, es de corriente continua. De esta forma habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua que se muestra en la Figura 1.40, donde la bobina se ha sustituido por un cortocircuito.

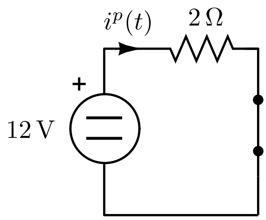



**Figura 1.40.** Circuito en régimen permanente de continua.

Según la Figura 1.40:

$$i^p(t) = \frac{12}{2} = 6\,\mathrm{A}$$

Asimismo:

$$i^p(0^+) = 6\,\mathrm{A}$$

Al ser un circuito RL, la constante de tiempo (para $t$>0) es la siguiente:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{2}\,\mathrm{s}$$

Una vez obtenida la condición inicial, la respuesta en régimen permanente y la constante de tiempo, a continuación se obtiene $i(t)$ para $t$>0:

$$i(t) = i^p(t) + \left[i(0^+) - i^p(0^+)\right] \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} = 6 + [14 - 6] \cdot \mathrm{e}^{-2t} = 6 + 8 \cdot \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{A}$$

## P. 1.6. RC con excitación de continua

El circuito de la Figura 1.41 está en régimen permanente cuando en $t$=0 se cierra el interruptor k1 y se abre k2. Calcular la intensidad $i(t)$ para $t$>0.

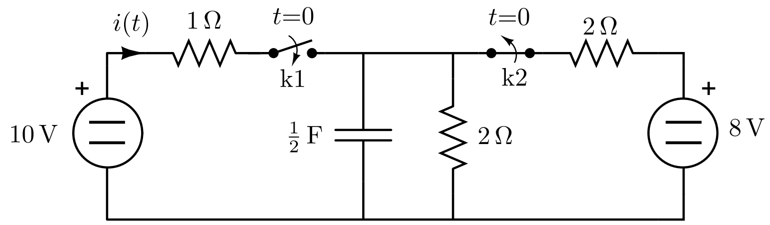



**Figura 1.41.**

***Solución.***

En primer lugar se obtendrá la tensión en el condensador antes de que los interruptores cambien de posición, es decir, para el instante $t$=0$^-$. Para ello se tendrá en cuenta que el circuito se encuentra en régimen permanente antes de que el interruptor k1 se cierre y que el interruptor k2 se abra. Como, en esta situación, la única fuente de excitación es de corriente continua, habrá que resolver el circuito en régimen permanente de continua mostrado en la Figura 1.42, donde el condensador se ha sustituido por un circuito abierto.

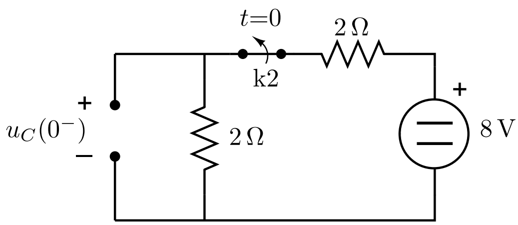



**Figura 1.42.** Circuito en $t$=0$^-$.

A partir de la Figura 1.42 se obtiene la tensión en el condensador en $t$=0$^-$:

$$u_C(0^-) = 8 \cdot \frac{2}{2+2} = 4\,\mathrm{V}$$

Salvo respuesta de tipo impulsional, que no es el caso, la tensión en el condensador no varía al cerrar el interruptor k1 y abrir el interruptor k2, por tanto:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 4\,\mathrm{V}$$

Para obtener la condición inicial de la intensidad $i(t)$ se empleará el circuito correspondiente al instante $t$=0$^+$. Dicho circuito se obtiene a partir del circuito original, una vez abierto el interruptor k2 y cerrado el interruptor k1, sustituyendo el condensador por