SANTIAGO SÁNCHEZ BEITIA

Con la colaboración de Mª Encarnación Gómez Genua y
Daniel Luengas Carreño (coautor del Capítulo 5)

ESTABILIDAD E ISOSTATICIDAD EN LA ARQUITECTURA

(Segunda Edición)

Apuntes de la Asignatura homónima en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Donostia-San Sebastián de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

DIAZ DE SANTOS

Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

Ediciones Díaz de Santos
Internet: http//www.editdiazdesantos.com
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-275-2
Depósito Legal: M-27650-2020

Fotocomposición y diseño de cubiertas: P55 Servicios Culturales

Printed in Spain - Impreso en España

ÍNDICE

Capítulo 2. FUNDAMENTOS DE LA ESTABILIDAD

Capítulo 3. ESTÁTICA GRÁFICA

Capítulo 4. ESFUERZOS CORTANTES Y MOMENTOS FLECTORES

Capítulo 5. ESTRUCTURAS TRIANGULARES ISOSTÁTICAS

INTRODUCCIÓN

Esta obra constituye la segunda edición de la publicación titulada *Estabilidad e Isostaticidad como introducción al análisis de las estructuras en la Arquitectura*, editada en el año 2008 (ISBN 978-84-9745-327-1) por el mismo autor. Fundamentalmente se han corregido algunos errores detectados, manteniendo la estructura y contenidos.

El libro es producto de una dedicación docente, desde el año 1983, en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Madrid y en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Donostia-San Sebastián de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU). De alguna manera, trata de relacionar los conceptos básicos de la Mecánica Racional con los fundamentos necesarios para introducir al lector en el análisis estructural de los elementos portantes en Construcción, campo que se aborda en tratados más avanzados y específicos.

Se presentan cinco capítulos, pilares fundamentales de lo que se pretende. En el Capítulo 1, Análisis Vectorial, se describen los conceptos y herramientas necesarias para "manipular" un conjunto de acciones exteriores (fuerzas y momentos) sobre un cuerpo. En su parte final, se presentan ejemplos que pueden ser útiles en Construcción. El Capítulo 2, Fundamentos de la Estabilidad, describe los grados de libertad de un sólido, la forma de fijarlo en el plano y en el espacio y el modo en que se resuelven las reacciones en los apoyos. El Capítulo 3, Estática Gráfica, detalla los métodos gráficos de resolución en el plano de las situaciones planteadas en el capítulo anterior. Estos métodos son suficientemente aproximados y, en muchos casos, más elegantes que los métodos analíticos. Incluso son más útiles en los problemas de transmisión de cargas a través de elementos portantes en Patrimonio Arquitectónico. El Capítulo 4, Esfuerzos Cortantes y Momentos Flectores, trata de la deducción de los esfuerzos "internos" en elementos tipo viga. Por último, el Capítulo 5, Estructuras Triangulares Isostáticas, se ocupa de la deducción de las cargas que soportan las barras de los sistemas portantes constituidos por un conjunto de ellas (cerchas y jácenas).

El título de la obra incluye dos conceptos que se antojan fundamentales: estabilidad e isostaticidad. El primero de ellos está relacionado con que las cosas no se muevan. El segundo está relacionado con los métodos de cálculo de las reacciones y deformaciones sobre un elemento. En Construcción, un sistema portante puede moverse, deformarse o ambos fenómenos a la vez. Obviamente el primer objetivo del profesional arquitecto o ingeniero es que los elementos portantes permanezcan quietos. Esta es la causa de la presencia de los tres primeros capítulos. Por otra parte, un elemento portante siempre se deforma bajo las acciones exteriores. La magnitud de estas deformaciones puede ser inapreciable tal y como sucede en los problemas clásicos de estática de bloques. Por el contrario, en los problemas de estructuras en Construcción las deformaciones, aunque de pequeña magnitud, deben ser calculadas y controladas para asegurar la integridad estructural del conjunto, sea edificio o puente. Los dos últimos capítulos están relacionados con estas cuestiones.

Todos los ejemplos analizados se resuelven en la consideración de que bastan las ecuaciones de equilibrio para resolverlos. Dicho de otro modo, el número de incógnitas del problema coincide con el número de ecuaciones disponibles de sólido rígido; es decir, que la suma de fuerzas y de momentos exteriores son cero. En la realidad constructiva esto no sucede así puesto que la gran mayoría de los casos son hiperestáticos; el número de reacciones (incógnitas) en los apoyos o enlaces es superior a las ecuaciones disponibles en la Estática. En otras obras más específicas se tratan estas cuestiones añadiendo las leyes de la Resistencia de Materiales. Se puede afirmar que las ecuaciones convencionales de la Estática son condiciones necesarias pero no suficientes para analizar y asegurar que los elementos portantes no se "muevan" y que, además, sus deformaciones sean conocidas. En esta obra se abordan estas condiciones necesarias, es la Isostaticidad. Se trata de una primera aproximación a la resolución del problema.

Conscientemente no se incluyen cálculos de Centros de Masa y de Momentos de Inercia. Existe una bibliografía muy extensa y fácilmente accesible sobre estas cuestiones, por lo que no se ha considerado relevante incluirlas.

Santiago Sánchez Beitia
Catedrático de la E.T.S. de Arquitectura de Donostia-San Sebastián
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU)

Nota del autor:

Todo el material que se incluye en la obra es original del autor. No obstante, dada la obviedad de los conceptos definidos, algunos ejemplos propuestos y resueltos que ya figuraban en la primera edición del año 2008 pueden ser semejantes o casi idénticos a los que aparecen en otras publicaciones similares a esta. El autor ha recogido fuentes de la propia experiencia, del libro *Aplicaciones de la Estática* (Ed. Limusa, 1972, ISBN 968-18-0611-5), del libro *Estática Gráfica* (Ed. CEAC por Castro Rodrigo) y del libro *Mecánica Vectorial para Ingenieros-Estática* (Ed. Libros Mc Graw-Hill de México, 1983, ISBN 968-451-508-1).

I

ANÁLISIS VECTORIAL

PARTE 1: FUNDAMENTOS

PARTE 2: SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

PARTE 3: SISTEMAS DE VECTORES FIJOS: DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS

EJEMPLOS PROPUESTOS

PARTE 1: FUNDAMENTOS

1. EL CARÁCTER VECTORIAL

Como el lector seguramente conoce, existe en Física el concepto de Vector para identificar una gran cantidad de magnitudes que es preciso definir, tratar y manipular para abordar numerosos fenómenos en la Naturaleza. Quizás sea repetitivo mencionar que, magnitudes tales como Velocidad, Fuerza, etc., no quedan perfectamente definidas o identificadas si se conoce únicamente su "valor". Es decir, el que un vehículo circule a una velocidad de 10 metros/segundo o el hecho de que alguien ejerza una fuerza de 30 kilogramos, no identifica con rigor lo que deseamos decir. De modo estricto, se puede afirmar que esos valores no indican, prácticamente, dato alguno. Falta algo más. Ese algo más es hacia dónde va el vehículo o hacia dónde va dirigida la fuerza, en qué dirección va el vehículo o en cuál está aplicada la fuerza y, por último, dónde está aplicada la magnitud, es decir, el punto de aplicación. En otras palabras, se necesita conocer más datos que su "valor". Se precisa identificar el sentido, la dirección y el punto de aplicación de la magnitud en cuestión. En resumen, de la gran mayoría de las magnitudes físicas necesitamos conocer su Módulo ("valor"), Dirección, Sentido y Punto de Aplicación y, además, debemos definir unas herramientas físico-matemáticas que permitan trabajar con todos estos conceptos a la vez. Este tipo de magnitudes se denominan Magnitudes Vectoriales, concepto ampliamente conocido. Es fácil comprobar que si de una Magnitud Vectorial se debe conocer su "valor" (es decir, su módulo), su dirección (en forma de una ecuación de una recta), su sentido (en forma de definir un sentido positivo dentro de la recta) y su punto de aplicación (mediante las coordenadas de ese punto), el tratamiento posterior de estos datos es ingobernable si no se hace de un modo ordenado y simple. Es la razón por la que, en su momento, se consideró que la mejor manera de tratar una magnitud vectorial es identificarla gráficamente mediante una "flecha" dibujada con una escala predeterminada, esto es, un Vector. La "longitud" de la flecha será el Módulo, la recta donde está contenida la flecha será la Dirección, hacia dónde apunte la flecha será el Sentido y su origen será el Punto de Aplicación. En este aspecto la flecha es un ente geométrico perfecto y el invento fue brillante. El Vector no es más que una representación gráfica de la realidad o, dicho de otro modo, el Vector representa a la magnitud física real. El Vector es un invento, no existe en la Naturaleza. Como es obvio, en la gran mayoría de los casos por analizar, no solamente habrá una magnitud vectorial actuando sobre un cuerpo. Lo lógico es que haya varias actuando a la vez (por ejemplo, varias fuerzas actuando sobre un sólido). Consecuentemente, se debe aprender a operar con las magnitudes vectoriales, es decir, con los vectores o flechas.

2. CARACTERIZACIÓN DE UN VECTOR (1ª VERSIÓN)

El concepto de caracterización del vector consiste en establecer el número mínimo de datos necesarios para identificar perfectamente la magnitud que la representa. Si el lector conoce ciertos conceptos de Álgebra, se puede decir que la caracterización trata de establecer una correspondencia biunívoca entre la Flecha y la Magnitud Física que la representa. Existen diversas maneras de caracterizar un vector ,como se verá en este y en siguientes apartados. En la Figura 1 se representa una magnitud física de 50 kilogramos, en la dirección de la bisectriz del primer octante, en sentido saliente y con punto de aplicación el origen de coordenadas. Para ello se ha elegido una escala y se ha dibujado la "flecha" ($\vec{V}$) de la figura.

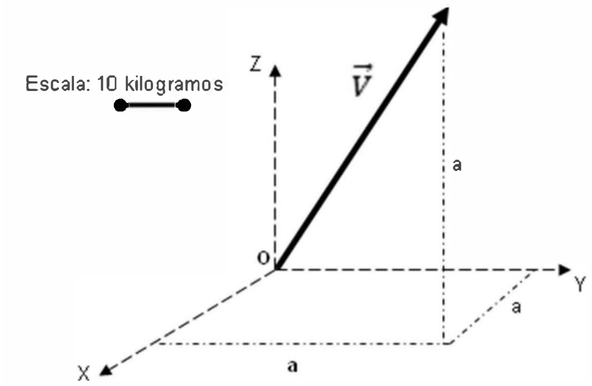

Figura 1.

En cualquier otro caso en el que la magnitud física no tenga la dirección del primer octante, el vector que la representa tendrá la disposición de la Figura 2.

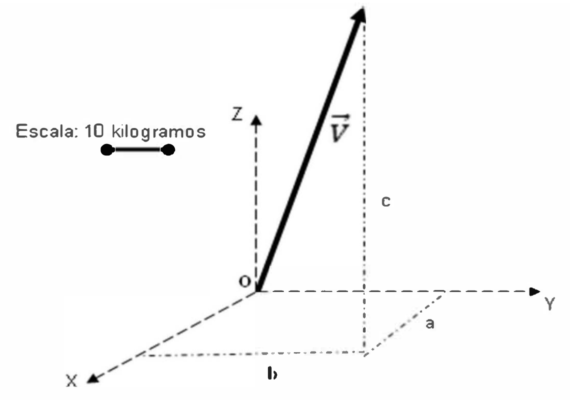

Figura 2.

Las cotas “a”, “b” y “c”, con su escala correspondiente, se denominan Coordenadas Cartesianas del Vector. Matemáticamente, el vector se representa del siguiente modo: $\vec{V}$ (a,b,c). El Módulo del Vector $\vec{V}$, que “valía” 50 kilogramos y se representa por la letra V (en cierta bibliografía el módulo se representa como $|\vec{V}|$), se expresa como la longitud de la diagonal del paralelepípedo de lados a, b y c, es decir:

$$V = (a^2 + b^2 + c^2)^{½}$$

Los valores de “a”, “b” y “c” se expresan, en este caso, en kilogramos. Más adelante, cuando se defina la Suma de Vectores y el Momento de un Vector, se describirán otros tipos de caracterización de un Vector.

Un Vector Unitario ($\vec{u}$) es aquel que tiene un módulo de valor la unidad. Matemáticamente las coordenadas de este tipo de vectores son las siguientes:

$$\vec{u} = \left(\frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{½}}, \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{½}}, \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{½}} \right)$$

Un vector unitario será por tanto $u = \vec{V}/V$. Su módulo será 1 kilogramo.

3. TIPOS DE VECTORES

Supóngase que se pretende aplicar una fuerza a un bloque mediante una cuerda de 1 metro de longitud. Si el peso de la cuerda es muy pequeño, se puede comprender que el efecto que produce la misma fuerza aplicada con una cuerda de 2 metros será el mismo (Figura 3). Es decir, el efecto que produce la fuerza no varía si se desplaza el punto de aplicación de la fuerza dentro de su recta de acción. En otras palabras, el efecto que produce la fuerza es el mismo si se aplica en A o en B, pero siempre en su misma dirección y sentido. Las magnitudes físicas que poseen esta propiedad se dice que se representan mediante un Vector Deslizante.

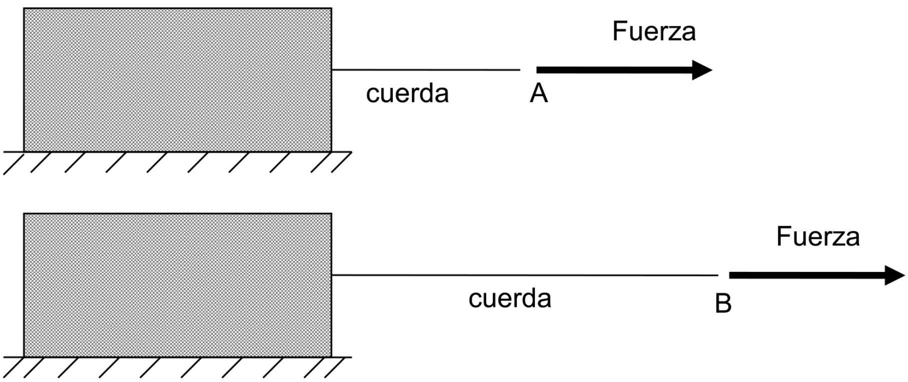

Figura 3.

El Vector Momento que se define en un apartado posterior, es un Vector Fijo porque su efecto varía de punto a punto de aplicación. Estrictamente se dice que las magnitudes físicas que poseen esta propiedad, se representan por un Vector Fijo. Por último, aquellos vectores cuyo efecto no varía si se aplican en un punto o en otro y en una dirección o en otra, se denominan Vectores Libres. La Resultante de un Sistema de Vectores, que se define en otro apartado posterior, tiene la consideración de Vector Libre. En alguna publicación, al vector libre se le denomina "pseudovector". Como se puede observar, el tipo de vector está vinculado a una relación causa-efecto.

4. SUMA Y RESTA DE VECTORES

Dados dos vectores $\overrightarrow{V_1}$ (a_1, b_1, c_1) y $\vec{V_2}$ (a_2, b_2, c_2), se define la suma $\vec{S}$ de ambos como el vector de coordenadas:

$$\vec{S}\ (a_1 + a_2 , b_1 + b_2 , c_1 + c_2)$$

Gráficamente (Figura 4), el Vector Suma es la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores sumando.

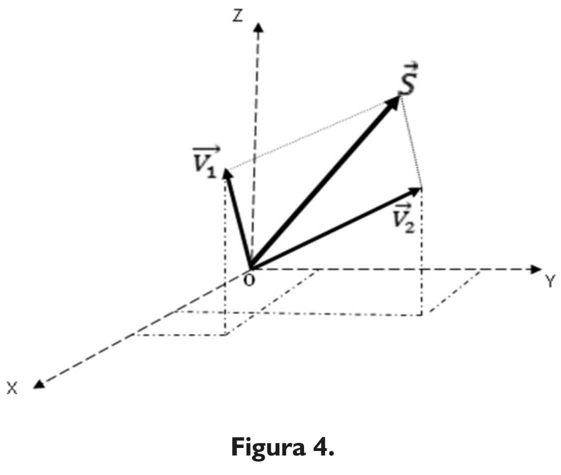

Figura 4.

En el caso de que la suma lo sea de tres o más vectores, el Vector Suma se expresa como:

$$\vec{S}\ (a_1 + a_2 + \ldots.\ , b_1 + b_2 + \ldots..\ , c_1 + c_2 + \ldots.)$$

Gráficamente la suma puede realizarse sumando los dos primeros y al resultado sumarle el tercer vector y así sucesivamente. También cabe la posibilidad de enlazar gráficamente todos los vectores llevando uno a continuación del otro; en este caso el Vector Suma es el que une el origen del primero con el extremo del último. La suma vectorial es una operación asociativa y conmutativa.

Nota Importante: *la suma aquí definida solo sirve para vectores sumando concurrentes, o aplicados, en un mismo punto O. Los vectores suma definidos tendrán su punto de aplicación en ese mismo punto O. Más adelante se volverá sobre esta cuestión.*

En cuanto a la resta de dos vectores, matemáticamente se expresa sin más que sustituir en las expresiones anteriores el signo "+" por el signo " - ". Gráficamente la resta de dos vectores es el vector que va desde el extremo del segundo al extremo del primero. Por ahora la resta sirve para vectores aplicados en el mismo punto O y el Vector Resta estará aplicado en ese mismo punto.

$$\vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{R}\,(a_1 - a_2\,, b_1 - b_2\,, c_1 - c_2)$$

Gráficamente (Figura 5):

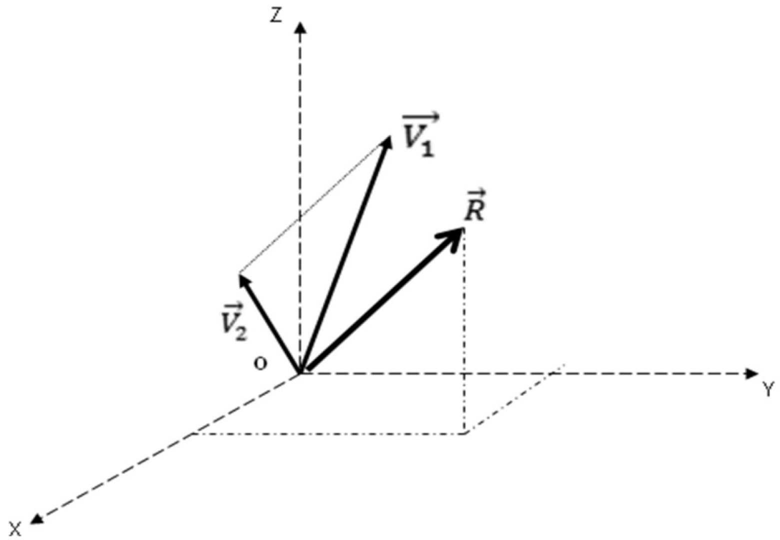

Figura 5.

5. PRODUCTO DE UN NÚMERO POR UN VECTOR

Sea una vector $\vec{V}$ (x,y,z) y un número real cualquiera "n", se define el producto del número "n" por el vector $\vec{V}$, al vector $\vec{W} = n\,\vec{V}$, definido por las siguientes coordenadas:

$$\vec{W}\,(nx\,, ny\,, nz)$$

Gráficamente, esta operación consiste en repetir "n" veces el vector $\vec{V}$ con su misma dirección, sentido y punto de aplicación.

6. CARACTERIZACIÓN DE UN VECTOR (2ª VERSIÓN)

Una vez que se ha definido la suma y resta de vectores y el producto de un número por un vector, se puede definir una nueva forma de caracterizar o identificar un vector. Antes de esto, es preciso definir los vectores unitarios en los ejes coordenados OX, OY y OZ como unos vectores de módulo unidad, dirección la de cada eje, sentido el positivo de cada eje y punto de aplicación el origen de coordenadas. Estos vectores unitarios se denominan $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ y $\vec{k}$. Por tanto, matemáticamente, un vector $\vec{V}$ de coordenadas a, b y c, puede expresarse del siguiente modo:

$$\vec{V}\,(a,b,c) = a\,\vec{\imath} + b\,\vec{\jmath} + c\,\vec{k}$$

Gráficamente (Figura 6):

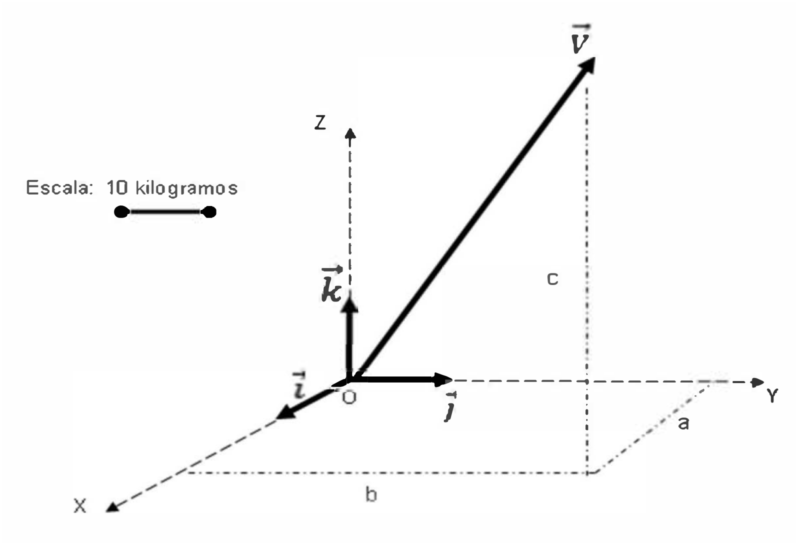

Figura 6.

7. PRODUCTOS DE VECTORES

Dados dos vectores $\vec{V_1}\,(x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{V_2}\,(x_2, y_2, z_2)$, se define el Producto Escalar de ambos vectores al resultado de la siguiente operación:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = V_1\, V_2 \cos\theta \text{ (siendo } V_1 \text{ y } V_2 \text{ los módulos de los vectores)}$$

donde θ es el ángulo que forman ambos vectores por el camino más corto. Se demuestra que el resultado de dicha operación coincide con el de la siguiente:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = x_1\, x_2 + y_1\, y_2 + z_1\, z_2$$

Las expresiones anteriores se pueden usar indistintamente. Gráficamente el Producto Escalar coincide con la proyección geométrica (p) de uno sobre el otro, multiplicada por el módulo de este otro (Figura 7). En todo caso, el Producto Escalar es un número, no un vector. Por tanto, del Producto Escalar no es preciso definir una dirección, un sentido o un punto de aplicación. Esta operación es conmutativa por su propia definición, dado que el coseno es una función par.

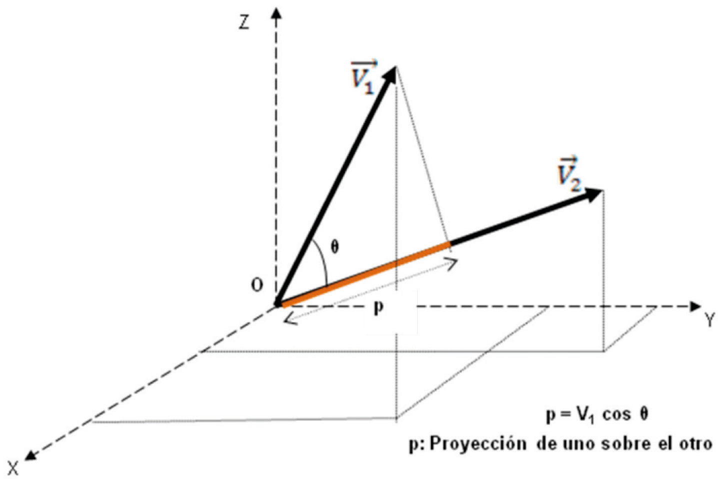

Figura 7.

Dados dos vectores $\vec{V_1}$ (x_1, y_1, z_1) y $\vec{V_2}$ (x_2, y_2, z_2), se define el Producto Vectorial ($\vec{W}$) de ambos vectores al resultado de la siguiente operación:

$$\vec{W} = \vec{V_1} \text{ x } \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Por la propia definición de Producto Vectorial, es un vector del que es preciso definir su módulo, dirección, sentido y punto de aplicación. El Módulo es:

$$W = V_1 \, V_2 \text{ sen } \theta$$

siendo θ el ángulo que forman ambos vectores, yendo del primero al segundo por el camino más corto. La Dirección es la perpendicular al plano definido por $\vec{V_1}$ y $\vec{V_1}$y el Sentido es el definido por la regla del “sacacorchos”, yendo de $\vec{V_1}$ a $\vec{V_2}$ por el camino más corto (Figura 8). Por el momento no se define el Punto de Aplicación que dependerá de cada situación analizada y que en cada momento se explicitará.

El Producto Vectorial no es conmutativo. De hecho por la propia definición se cumple que:

$$\vec{W} = \vec{V_1} \text{ x } \vec{V_2} = - \vec{V_2} \text{ x } \vec{V_1}$$

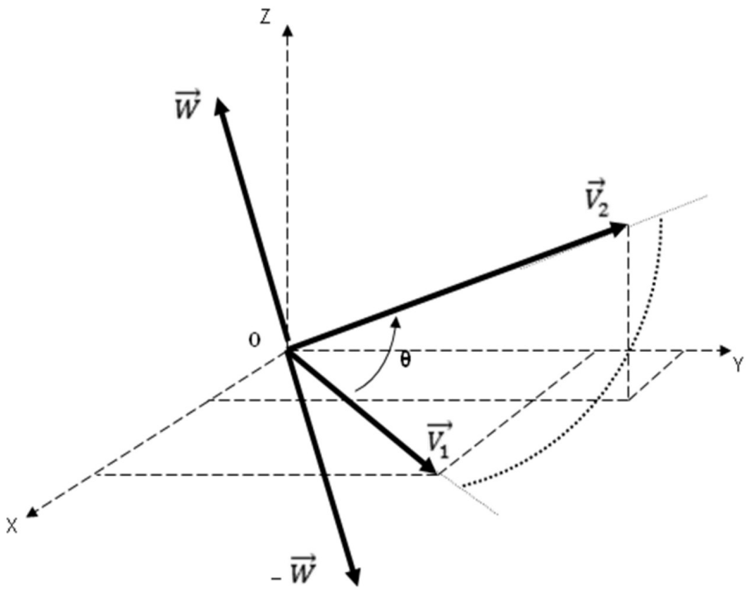

Figura 8. Por claridad se ha representado el vector $\vec{V_1}$ sobre el plano XY.

Se define como Producto Mixto de tres vectores $\vec{V_1}$ (x_1, y_1, z_1), $\vec{V_2}$ (x_2, y_2, z_2) y $\vec{V_3}$ (x_1, y_1, z_1), y se representa como $\vec{V_1}$. ($\vec{V_2}$ x $\vec{V_3}$), al resultado de la siguiente operación:

$$W = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Matemáticamente, W es un escalar que coincide con el volumen del paralelepípedo construido a partir de los tres vectores.

8. MOMENTO DE UN VECTOR

8.1. Momento de un Vector respecto de un punto

Este concepto sea probablemente uno de los de mayor importancia en Mecánica. Dado un vector $\vec{V}$ (x, y, z), cuya recta de acción contiene a un punto O, se define

Momento del Vector respecto de un punto A, y se representa como $\overrightarrow{M_A}$, al producto vectorial definido del siguiente modo:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AO} \times \vec{V}$$

siendo $\overrightarrow{AO}$ el vector que "va" de A hasta O. El Módulo, Dirección y Sentido del vector Momento $\overrightarrow{M_A}$ se rige por lo definido para el Producto Vectorial. Su Punto de Aplicación es el punto A por definición (por tanto es un Vector Fijo). En la siguiente figura (Figura 9) se hace coincidir el punto O con el origen de coordenadas por claridad de la gráfica.

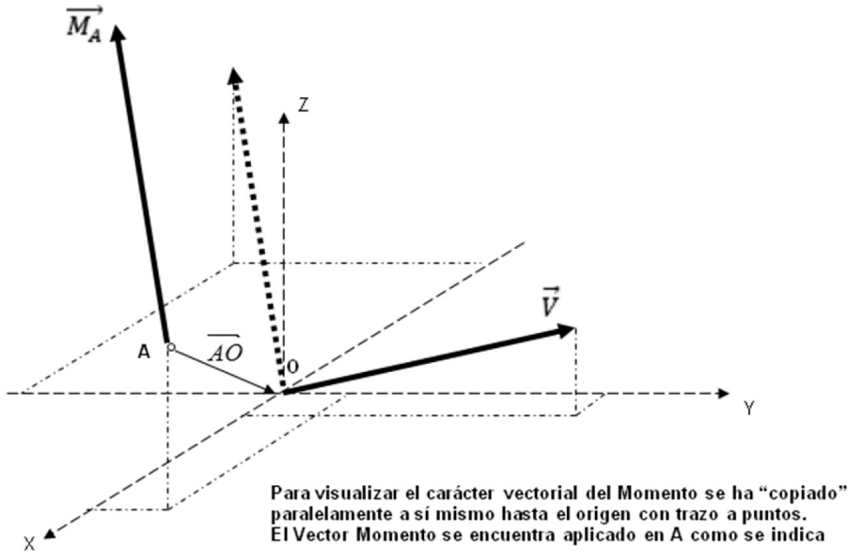

Figura 9.

La definición del Momento permite definir cuatro propiedades de gran importancia, como se verá a lo largo de los sucesivos capítulos:

1. No tiene sentido definir el Momento de un Vector Libre. Si un vector es Libre se puede aplicar en cualquier punto del espacio; por tanto si ese vector se aplica en A su momento es cero, puesto que $\overrightarrow{AO} = 0$ en este caso.
2. El Momento de un vector no varía si se traslada $\vec{V}$ a lo largo de su recta de acción (por ejemplo, trasladándolo de O a B en Figura 10). Matemáticamente la demostración es inmediata puesto que $\overrightarrow{OB}$ y $\vec{V}$ son colineales en este caso ($\theta = 0º$) y, por tanto, su Producto Vectorial es cero (Figura 10):

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AB} \times \vec{V} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \times \vec{V} = \overrightarrow{AO} \times \vec{V} + \cancel{\overrightarrow{OB} \times \vec{V}} = \overrightarrow{AO} \times \vec{V}$$

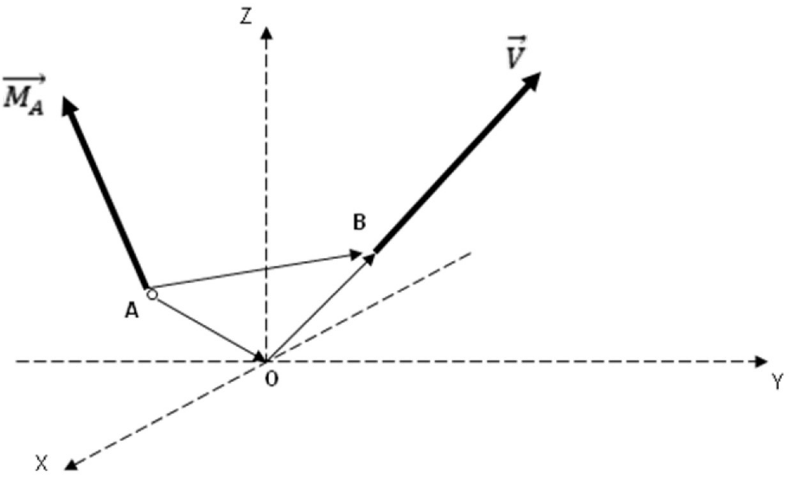

Figura 10.

3. El Momento de un vector no varía si se desplaza el Punto A paralelamente al Vector $\vec{V}$. La demostración es similar a la anterior (Figura 11).

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{BO} \text{ x } \vec{V} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO}) \text{ x } \vec{V} = \cancel{\overrightarrow{BA} \text{ x } \vec{V}} + \overrightarrow{AO} \text{ x } \vec{V} = \overrightarrow{AO} \text{ x } \vec{V} = \overrightarrow{M_A}$$

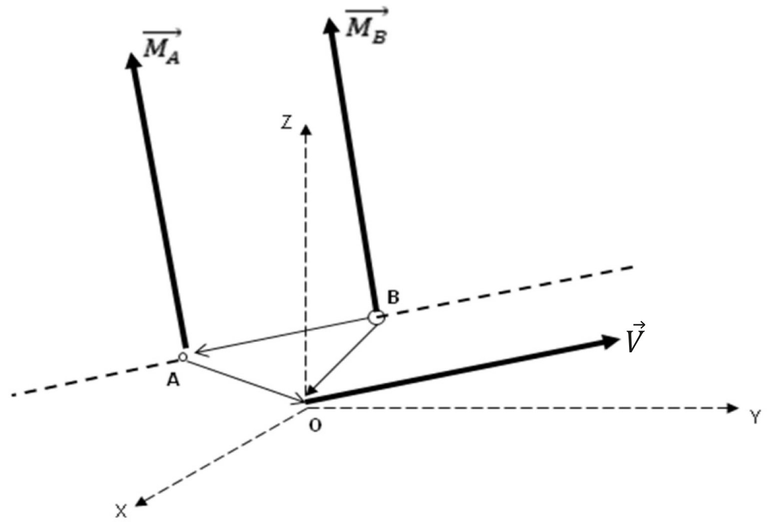

Figura 11.

4. Relación de Momentos en puntos diferentes. Dados dos puntos A y B, la relación entre los momentos de un vector $\vec{V}$, respecto a dichos puntos, es la siguiente:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + (\overrightarrow{AB} \text{ x } \vec{V})$$

siendo $\overrightarrow{AB}$ el vector que "va" desde el punto A al B (Figura 12). La demostración es evidente:

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{BO} \text{ x } \vec{V}$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{AO} \text{ x } \vec{V} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO}) \text{ x } \vec{V} = \overrightarrow{AB} \text{ x } \vec{V} + \overrightarrow{BO} \text{ x } \vec{V} = \overrightarrow{M_B} + (\overrightarrow{AB} \text{ x } \vec{V})$$

Es decir:

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + (\overrightarrow{AB} \text{ x } \vec{V})$$

Gráficamente (Figura 12):

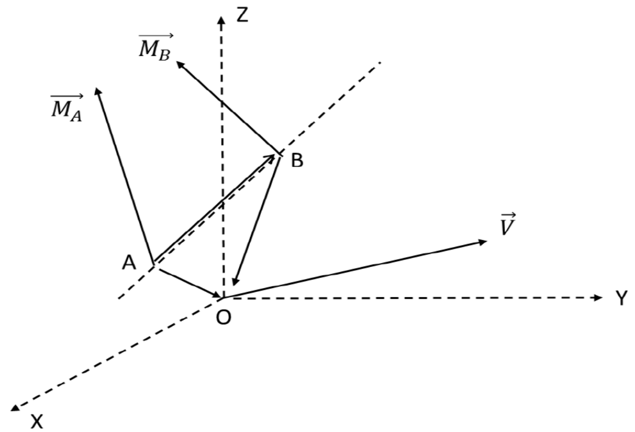

Figura 12.

8.2. Momento de un Vector respecto de un Eje

En Mecánica se define un Eje como una Recta en la que se define un sentido positivo. Para ello, basta con identificar un vector unitario $\vec{u}$ en la dirección de la Recta. El sentido de $\vec{u}$ será el positivo del Eje.

Se define como Momento de un Vector respecto a un Eje (E) definido por $\vec{u}$, al producto escalar del Momento del Vector respecto de cualquier punto "A" del Eje, por el vector unitario del Eje. Por tanto, no posee carácter vectorial. Matemáticamente:

$$M_E = \overrightarrow{M_A} \ . \ \vec{u}$$

El Momento de un vector respecto de un eje, M_E, es independiente de la elección del Punto A dentro del Eje. Si B es otro punto contenido en el Eje, la demostración es evidente:

$$\overrightarrow{M_B} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \times \vec{V}) \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u}) + \cancel{(\overrightarrow{BA} \times \vec{V}) \cdot \vec{u}} = \overrightarrow{M_A} \cdot \vec{u} = M_E$$

En este caso, los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\vec{u}$ son colineales y el sumando producto mixto de la expresión anterior, forma un volumen nulo.

9. CARACTERIZACIÓN DE UN VECTOR (3ª VERSIÓN)

Las tres coordenadas de un vector $\vec{V}$ (x, y, z) y su momento en cualquier punto del espacio ($\vec{M}$), son coordenadas del vector o, dicho de otro modo, las tres coordenadas de un vector y las de su momento respecto de cualquier punto del espacio, definen biunívocamente al vector. El siguiente razonamiento se basa en que un Vector y su Momento son, por definición, perpendiculares. Supóngase que $\overrightarrow{M_A}$ es el Momento del vector respecto A y se hace coincidir un eje AX con la dirección de $\overrightarrow{M_A}$. Se dibuja un segundo eje coordenado perpendicular a $\overrightarrow{M_A}$ que será denominado como eje AZ. Del vector $\vec{V}$ únicamente se conocen sus coordenadas (0, 0, z) sin conocer en qué dirección actúa. El hecho de que únicamente tiene coordenada z queda patente porque se ha hecho coincidir un eje AZ con su dirección. Se puede demostrar que la dirección del vector $\vec{V}$ corta al tercer eje AY en un punto B situado a una distancia $d = M_A/V$ (Figura 13). Esta igualdad se deduce del valor del módulo del producto vectorial:

$M_A = d\ V\ \text{sen}90^{\circ}$ de donde se deduce

$$d = {M_A}/{V}$$

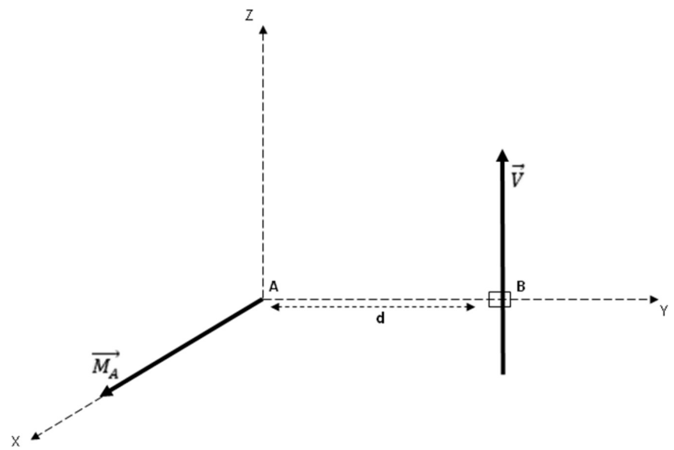

Figura 13.

Queda por demostrar la unicidad de la afirmación. Es decir, que cualquier otro vector $\overrightarrow{V^{|}}$ que cumpla lo afirmado coincide con el inicial $\vec{V}$ (véase Figura 14). La perpendicularidad entre $\overrightarrow{M_A}$ y $\vec{V}$ queda garantizada por la propia definición de producto vectorial entre $\vec{d}$ y $\vec{V}$. Supóngase que existe otro vector $\overrightarrow{V^{|}}$ que cumpla lo afirmado, esto es, que su momento sea $\overrightarrow{M_A}$ con la construcción realizada. En este caso:

$$\overrightarrow{M_A} = \vec{d} \text{ x } \vec{V} = \begin{vmatrix} M_A \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{d^{|}} \text{ x } \overrightarrow{V^{|}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ d' \cos\theta & d' \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

Igualando componente a componente:

Componente en AX: z d´ sen θ = M_A
Componente en AY: z d´ cos θ = 0
Componente en AZ: 0 = 0

De la segunda condición se deduce que θ = 90º, si z y d´ son ambos diferentes de cero (si z o d´ son cero, el planteamiento no tiene sentido). Por tanto el Punto B´ coincide con B. Pasando a la primera de las condiciones anteriores: d´= z/M_A . Al ser z la única coordenada de $\vec{V}$, su módulo V coincide con z. Por tanto:

$$d' = d = M_A / V$$

La Figura 14 no es una construcción particular para la demostración realizada. Siempre se podrá hacer coincidir un eje coordenado con $\overrightarrow{M_A}$ y otro eje paralelo a $\vec{V}$ y que a su vez es perpendicular a $\overrightarrow{M_A}$. Al conjunto de valores, en el caso más general, compuesto por la terna $\vec{V}$(x , y , z) y el vector Momento $\overrightarrow{M_A}$, se denominan Coordenadas Vectoriales del Vector $\vec{V}$. Más adelante se verá la importancia de esta definición.

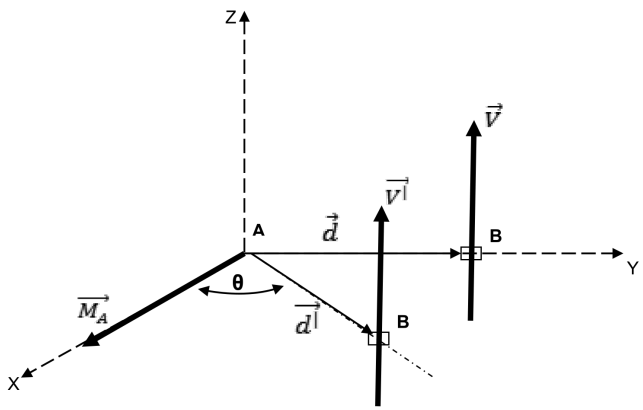

Figura 14.

PARTE 2: SISTEMAS DE VECTORES DESLIZANTES

10. SISTEMA DE VECTORES DESLIZANTES. EJE CENTRAL

Un Sistema de Vectores Deslizantes no es más que un conjunto de vectores deslizantes. Como se puede intuir, sobre un sólido actuarán en situaciones reales más de una fuerza, situación que es preciso analizar. La importancia de este apartado es, por tanto, obvia.

10.1. Resultante de un Sistema de Vectores Deslizantes

En la gran mayoría de los casos, los vectores de un sistema no son concurrentes en un punto. Por esta razón, la Suma de los vectores del Sistema no está definida. Únicamente se podrán sumar las coordenadas de los vectores para dar un ente, $\vec{R}$, con unas determinadas coordenadas, pero sin el carácter propio de vector. Sea un conjunto de vectores $\overrightarrow{V_1}$ (x_1, y_1, z_1), $\vec{V}_2$ (x_2, y_2, z_2), $\overrightarrow{V_3}$ (x_3, y_3, z_3), etc., se define Resultante del Sistema de Vectores Deslizantes al "vector" $\vec{R}$ definido por la suma de las coordenadas de los vectores del sistema:

$$\vec{R}\ (x_1 + x_2 + x_3 + \dots,\ y_1 + y_2 + y_3 \dots,\ z_1 + z_2 + z_3 + \dots)$$

Tiene el carácter de Vector Libre porque en general no está definida la suma. Se podrá representar gráficamente pero sin poderle adjudicar un punto de aplicación o una dirección donde esté aplicado. A la Resultante de un Sistema se le denomina *1er Invariante del Sistema* puesto que únicamente depende de las coordenadas de los vectores del Sistema.

10.2. Momento de un Sistema de Vectores Deslizantes

Supóngase que los puntos A, B, C, etc., pertenecen, respectivamente, a las rectas de acción de los vectores $\overrightarrow{V_1}$ (x_1, y_1, z_1), $\vec{V}_2$ (x_2, y_2, z_2), $\overrightarrow{V_3}$ (x_3, y_3, z_3), etc. Figura 15). Dado un Punto P, se define Momento del Sistema de Vectores respecto del Punto P a la suma de los momentos de cada vector del sistema con respecto al Punto P. Matemáticamente:

$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{d_1} \times \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{d_2} \times \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{d_3} \times \overrightarrow{V_3} + \dots$$

Es preciso reflexionar sobre el hecho de que únicamente cuando los vectores del sistema son concurrentes, el Momento del Sistema será el Momento de la suma de los vectores. En el resto de situaciones (son la mayor parte de los casos), el Momento del Sistema es la suma de los momentos de cada vector.

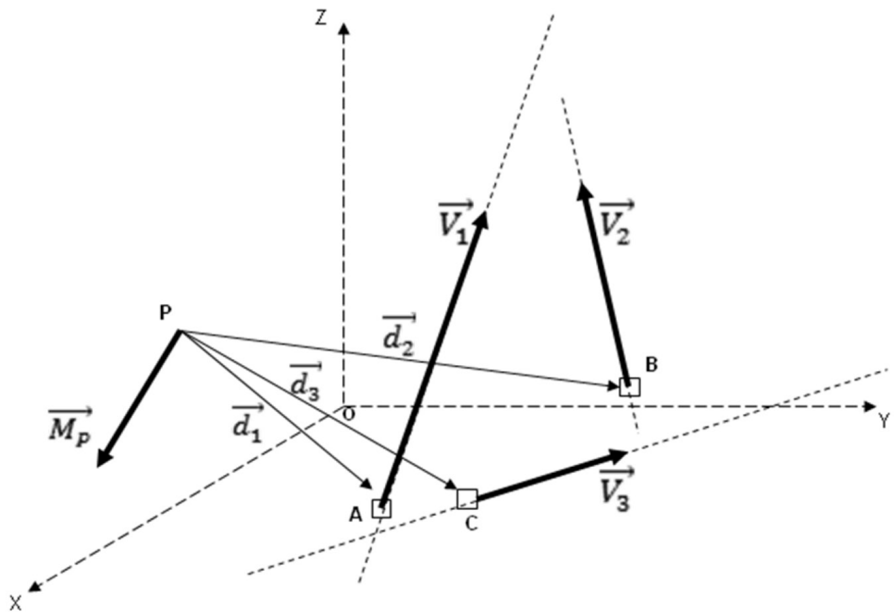

Figura 15.

10.3. Propiedades del Momento de un Sistema de Vectores Deslizantes

A continuación se definen y demuestran cinco propiedades fundamentales.

1) Relación entre los momentos de un sistema respecto a dos puntos P y Q. Sea $\vec{R}$ la resultante del sistema, la relación entre los momentos del sistema respecto ambos puntos es la siguiente (véase Figura 16):

$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_Q} + (\overrightarrow{PQ} \text{ x } \vec{R})$$

La demostración es evidente:

$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{PA} \text{ x } \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{PB} \text{ x } \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{PC} \text{ x } \overrightarrow{V_3} + \ldots. = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}) \text{ x } \overrightarrow{V_1} + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}) \text{ x } \overrightarrow{V_2} + (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC}) \text{ x } \overrightarrow{V_3} + \ldots. = \overrightarrow{PQ} \text{ x } \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{PQ} \text{ x } \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{PQ} \text{ x } \overrightarrow{V_3} + \ldots. + \overrightarrow{QA} \text{ x } \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{QB} \text{ x } \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{QC} \text{ x } \overrightarrow{V_3} + \ldots = (\overrightarrow{PQ} \text{ x } \vec{R}) + \overrightarrow{M_Q}$

Gráficamente (Figura 16):

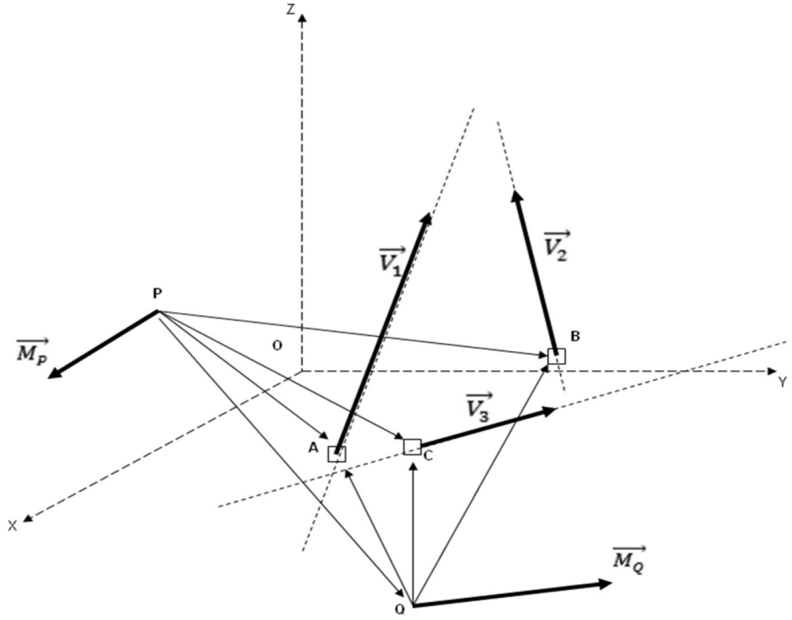

Figura 16.

2) El Momento de un Sistema no varía si el punto P donde se toma el momento se desplaza paralelamente a la Resultante. Si P y Q están sobre una recta paralela a $\vec{R}$, el vector $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{R}$ son colineales, por lo que su producto vectorial es cero. Matemáticamente:

$$\overrightarrow{M_P} = \overrightarrow{M_Q} + \cancel{(\overrightarrow{PQ} \text{ x } \vec{R})} = \overrightarrow{M_Q}$$

Gráficamente (Figura 17):

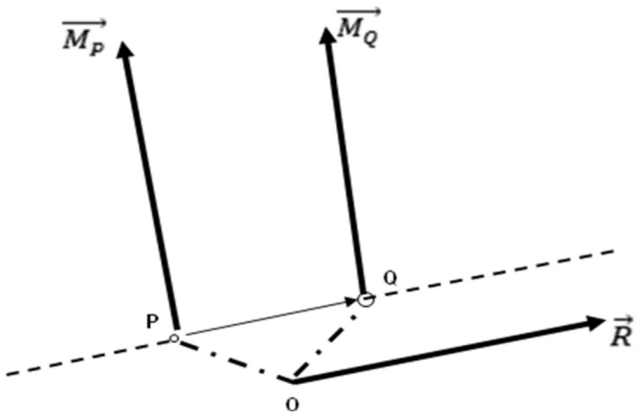

Figura 17.

3) La Resultante de un Sistema $\vec{R}$ y el Momento del Sistema respecto a un punto cualquiera P ($\overrightarrow{M_P}$) del espacio, constituyen unas Coordenadas del Sistema de Vectores. En efecto, por un lado la resultante $\vec{R}$ depende únicamente de las coordenadas de los vectores del Sistema. Por otro lado, basta conocer el Momento del Sistema en un Punto cualquiera P para conocer el Momento del Sistema en cualquier otro Punto Q (Propiedad a) anterior). Por tanto $\vec{R}$ y $\overrightarrow{M_P}$ constituyen unas coordenadas del sistema.
4) El Producto Escalar de la Resultante $\vec{R}$ de un Sistema por el Momento del Sistema respecto de cualquier punto del espacio P, es constante, es decir, es un invariante. Al valor de este Producto Escalar se le denomina 2º Invariante del Sistema (τ). En efecto:

$$\boldsymbol{\tau} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_P} = \vec{R} \cdot (\overrightarrow{M_Q} + \overrightarrow{PQ} \times \vec{R}) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_Q} + \cancel{\vec{R} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \vec{R})} = \vec{R} \cdot \overrightarrow{M_Q}$$

puesto que el segundo sumando es cero por representar un producto mixto en el que dos vectores son el mismo.
5) Las Proyecciones de Momentos respecto de puntos alineados sobre la recta que los une son iguales. Si $\overrightarrow{M_A}$ y $\overrightarrow{M_B}$ son los Momentos del Sistema en A y en B respectivamente, la igualdad de proyecciones se puede expresar matemáticamente como:

$$\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{AB}$$

La demostración es evidente relacionando los Momentos $\overrightarrow{M_A}$ y $\overrightarrow{M_B}$:

$$\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \times \vec{V}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} \times \vec{V}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{AB}$$

En sentido estricto, la proyección es el producto escalar de un vector por el vector unitario de la dirección sobre la que se pretende proyectar. En este caso habría que dividir ambos términos de las igualdades por el módulo "AB" del vector $\overrightarrow{AB}$. No obstante el resultado queda invariable.

Nota importante a esta propiedad

Los Momentos de un Sistema respecto de tres puntos no alineados cualesquiera del espacio son también Coordenadas del Sistema. Sean A, B y C tres puntos no alineados del espacio en los que se conoce los Momentos de un Sistema $\overrightarrow{M_A}$, $\overrightarrow{M_B}$ y $\overrightarrow{M_C}$. El que estos Momentos pertenecen al mismo Sistema queda demostrado si se cumple la relación anterior para los tres puntos. Es decir:

$$\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{M_A} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_C} \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{M_B} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{M_C} \cdot \overrightarrow{BC}$$