Mª TERESA GONZÁLEZ MANTEIGA

400

PROBLEMAS RESUELTOS DE ESTADÍSTICA MULTIDISCIPLINAR

DIAZ DE SANTOS

Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

Ediciones Díaz de Santos
Internet: http//www.editdiazdesantos.com
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

ISBN: 978.84-9052-267-7
Depósito Legal: M-4185-2021

Fotocomposición y diseño de cubiertas: P55 Servicios Culturales

Printed in Spain / Impreso en España

ÍNDICE

PRÓLOGO

"Cada uno de nosotros debe trabajar su propio
perfeccionamiento, aceptando,
en la vida general de la humanidad, su parte de responsabilidad,
ya que nuestro deber particular es el de ayudar a aquellos
a quienes podemos ser útiles"

María Slodowska-Curie
Premio Nobel de Física 1903 y
Premio Nobel de Química 1911

Las palabras de María Slodowska-Curie, y su ejemplo durante toda su vida, son un acicate no solo para nuestra propia formación sino también para la de aquellos que tengamos en nuestro entorno, de modo que unos a otros nos ayudemos y entre todos hagamos un mundo mejor.

Saber es hacer puede servir de introducción a este libro de *Problemas resueltos de Probabilidad y Estadística* destinado a estudiantes de los primeros cursos universitarios y a todos aquellos que necesiten apoyarse en la Estadística para aceptar o rechazar hipótesis de trabajo en sus investigaciones. Cualquiera que sea la disciplina científica, de la ingeniería o de las ciencias sociales, que trabaje con experimentos de tipo aleatorio y trate de confirmar una hipótesis de trabajo, a partir de unos datos recogidos, necesita los métodos estadísticos que permiten aceptar o rechazar esa hipótesis con alta probabilidad de acertar o, lo que es lo mismo, con riesgo muy bajo de equivocarse.

La Estadística es una de las ramas más recientes de las Matemáticas. Algunos rechazan su estudio, la ven complicada y como una barrera insalvable, porque intentan hablar un lenguaje del que desconocen hasta su alfabeto. En esta disciplina, como en muchas otras, el trabajo personal es fundamental. Decía Terencio: "No hay cosa tan difícil que a fuerza de estudiarla no parezca fácil" y también "No hay cosa por fácil que sea que no la haga difícil la mala gana".

La metodología y las técnicas estadísticas se comprenden mejor haciendo ejercicios, planteando problemas, resolviéndolos e interpretando los resultados obtenidos. No se pueden improvisar ni inventar las conclusiones. Cuando se logra plantear un problema, resolverlo e interpretar los resultados, a todos nos gusta, se entiende el verdadero valor de la Estadística y se reconoce como una buena herramienta que es útil para la Ciencia en general, incluidas las Ciencias Sociales, y también para la Técnica.

Hoy vivimos en un mundo audiovisual. Los alumnos en la Universidad no toman o no saben tomar apuntes, utilizan el móvil y la *tablet* para todo, escriben poco y algunos mal y almacenan en la memoria de un portátil algunos archivos. De este modo les cuesta más entender y aplicar disciplinas como la Estadística. Todos hemos experimentado que lo que se oye se olvida fácilmente, lo que se ve se recuerda y lo que se hace se retiene por más tiempo, porque se entiende mejor. Sabemos que la lectura nos da una persona formada, el diálogo científico una persona preparada y la escritura una persona exacta. Decía

Balmes: *"La lectura es como el alimento, el provecho no está en proporción de lo que se come, sino de lo que se digiere".*

La Estadística, como cualquier otra rama de las Matemáticas, tiene múltiples aplicaciones en campos muy diversos. Para poder aprovechar sus aplicaciones es necesario conocer la nomenclatura estadística y sus técnicas. Este libro de problemas resueltos pretende familiarizar al lector con las técnicas estadísticas y a la vez presentarle sus aplicaciones en distintos campos. El mejor modo de familiarizarse con la Probabilidad y con la Estadística, y la única forma de comprenderla, pasa por adquirir unas habilidades que solo se consiguen mediante la resolución de problemas. De esta forma se comprenden los conceptos teóricos y posteriormente cada uno lo puede aplicar en su campo de estudio y de trabajo. Este es el objetivo de este libro que se ha escrito después de muchos años dedicados a la docencia de la Estadística.

Para una mejor comprensión, cada capítulo comienza con una sucinta introducción teórica con nomenclatura, fórmulas y cuadros-resumen. Para profundizar en la teoría se recomienda consultar un libro de teoría. Muchos de los problemas que aquí aparecen totalmente resueltos con detalle fueron propuestos en el libro *Estadística Aplicada. Una visión instrumental.* Ed. Díaz de Santos, 2009, y también se han añadido otros nuevos.

En la Estadística hay que entrenarse todos los días, como lo hacen los buenos deportistas. Un campeón no llega a serlo mirando cómo lo hace otro compañero o leyendo un manual. Las medallas se ganan en los entrenamientos; en los campeonatos o en las Olimpiadas solo se recogen. Lo mismo ocurre con la Estadística. En la vida, con esfuerzo personal, algunas veces se triunfa, pero siempre se aprende. Lo que se aprende no se pierde y es nuestra mayor riqueza.

Para obtener un mayor provecho de este libro se recomienda seguir el orden establecido de los temas y en cada uno de ellos leer la introducción, tener a mano un manual de teoría, elegir los problemas, resolverlos, o al menos intentarlo sin mirar previamente la solución, y posteriormente comprobar el resultado y comprehender el procedimiento de resolución.

El estudiante y el investigador de hoy necesitan analizar los datos que recogen en su campo de trabajo y se encuentran, en numerosas ocasiones, en situaciones de incertidumbre, lo que hace necesario la utilización de métodos estadísticos para sacar de su estudio mejores conclusiones.

Los métodos estadísticos son de dos tipos: descriptivos e inductivos. Los *métodos descriptivos* se ocupan de la recogida de muestras y de ordenar, resumir y analizar los datos de la muestra o las muestras recogidas. A partir del conocimiento de una o más muestras de las poblaciones objeto de estudio, se formulan hipótesis sobre la población, o las poblaciones, de las que proceden, se contrastan y se obtienen conclusiones, aceptando o rechazando las hipótesis planteadas con una probabilidad alta de acertar. Este es el objetivo de los *métodos inductivos*.

Actualmente es frecuente encontrar alumnos en los primeros cursos de Grado, que se enfrentan por primera vez a la Estadística, desconociendo el lenguaje específico de esta materia. Por lo que no comprenden los textos ni saben interpretar los enunciados de los problemas. Por ello en el *Capítulo 1* de este libro se hace una breve introducción que incluye Nomenclatura y Glosario de símbolos y se recogen en él ejercicios sobre los fundamentos generales y Álgebra de Sucesos Aleatorios, conocimientos básicos necesarios para traducir los enunciados de los problemas al lenguaje de la Estadística. Se incluye también la Combinatoria, que ayuda a discernir si el orden de los elementos es irrelevante o no y que facilita contar el número de casos favorables a un suceso dado entre todos los posibles.

En el *Capítulo 2* se incluyen problemas de Estadística Descriptiva Unidimensional y Bidimensional. Regresión. Números Índices. En el *Capítulo 3* los problemas de Probabilidad. En el *Capítulo 4* los problemas de Distribuciones de Probabilidad Discretas. En el *Capítulo 5* problemas de Distribuciones de Probabilidad Continuas. Aproximaciones de Distribuciones Discretas por Distribuciones Continuas. Distribuciones Conjuntas. Independencia de Variables Aleatorias. Intervalos de Probabilidad.

Con el *Capítulo 6*, Inferencia Estadística I, comienzan los Métodos Inductivos que permiten aceptar o rechazar hipótesis sobre la población, o las poblaciones objeto de estudio, a partir de los resultados de muestras extraídas o dadas y obtener conclusiones, con una probabilidad alta de acertar. En este tema se incluyen los problemas de Estimación de parámetros e Intervalos de Confianza. En el *Capítulo 7,* Inferencia Estadística II, los problemas de Contrastes de Hipótesis Paramétricos, que exigen que las muestras procedan de distribuciones Normales.

La Inferencia a partir de muestras de tamaño pequeño que proceden de poblaciones que no son Normales, como ocurre a menudo en la investigación en Psicología, en Pedagogía, en Ciencias Sociales… para tratar muestras que vienen dadas y no son recogidas por quien tiene que realizar el estudio estadístico, hay que aplicar Contrastes de Hipótesis No Paramétricos, o de distribución libre. Los problemas de Contrastes de Hipótesis No Paramétricos: Contrastes χ^2 de Bondad de Ajuste, Contrastes de Homogeneidad, Contrastes de Independencia, Otros Contrastes No Paramétricos se recogen en el *Capítulo 8,* Inferencia Estadística III.

En el *Capítulo 9,* Inferencia Estadística IV, se incluyen los problemas de Análisis de la Varianza y los de Análisis de la Regresión Lineal Simple.

Y en el *Capítulo 10,* Inferencia Estadística V, los problemas de Análisis de la Varianza y Análisis de la Regresión utilizando STATGRAPHICS™[1] Centurion XVII, que facilita enormemente los cálculos, sobre todo si las muestras son grandes, y que proporciona ayuda gráfica para interpretar los resultados.

También en temas anteriores se han resuelto, o comprobado, problemas con el Programa de Análisis Estadístico STATGRAPHICS™ Centurion XVII, por ser esta una buena versión muy empleada, por su facilidad de manejo y por los resultados gráficos que ofrece. Otros programas que se utilizan son: Excel™[2], que permite formar tablas detalladas de los cálculos, y DERIVE™[3], Versión 6.10, para realizar algunas operaciones, por su gran precisión y para representar algunas gráficas.

Se adjunta un archivo titulado “Archivo DATOS Libro Problemas.sgd”, en el que están grabados los datos para analizarlos con STATGRAPHICS.

Los problemas se resuelven a mano, haciendo uso de calculadora, hojas de cálculo y tablas de las distribuciones incluidas en este libro. También, cuando hay que manejar muchos datos, se utiliza el Programa STATGRAPHICS Centurion XVII.

El conjugar ambos procedimientos ayuda, entre otras cosas, a comprender mejor el método para obtener la solución, a interpretar los resultados que proporcionan los Programas Informáticos, a valorar la ayuda que supone poder hacer uso de *software,* que ahorra tiempo, facilita los cálculos y desarrolla el espíritu crítico, fomentando el hábito de no aceptar sin justificación ningún resultado. Familiarizarse con STATGRAPHICS™ Centu-

1. STATGRAPHICS es una marca registrada por Manugistics Inc. and Statistical Graphics Corporation. USA.
2. Excel es una marca registrada por Microsoft Corporation.
3. DERIVE es una marca registrada por Texas Instruments Incorporated.

rion XVII ayuda y permite comprender los resultados de otros programas estadísticos. El uso de estos es hoy imprescindible en la investigación y en el trabajo científico.

En el *Anexo* se incluyen las Tablas de las Distribuciones Estadísticas que se utilizan para resolver los problemas.

Ojalá este libro de problemas resueltos sea útil tanto a estudiantes universitarios como a cuantos necesiten aplicar la Estadística en la investigación o en su profesión. En la actualidad es muy difícil realizar investigación sin utilizar la Estadística y el ordenador, que facilita el cálculo y el manejo de gran cantidad de datos ahorrando tiempo y esfuerzo y con una precisión asombrosa.

Doy las gracias a la Editorial por haber confiado de nuevo en mi trabajo, y a todas las personas que han contribuido a que este libro se haya podido escribir: a mis profesores que me han ayudado a formarme y siempre han resuelto mis dudas, algunos ya fallecidos, a mis alumnos por sus preguntas y dudas planteadas que me han motivado y alentado cada día en esta tarea y a mi familia por su apoyo incondicional.

Si a las personas que utilicen este libro les resulta provechoso, habré logrado mi objetivo de animarles a hacer un buen uso de la Estadística. Estaré muy agradecida a todos los que me remitan sus opiniones, sugerencias o comentarios a la siguiente dirección mtgmant@bio.ucm.es

Capítulo

1

Fundamentos generales
Sucesos aleatorios
Combinatoria

No nos atrevemos a muchas cosas porque son difíciles, pero son difíciles porque no nos atrevemos a hacerlas.

Por la ignorancia se desciende a la servidumbre, por la educación y el estudio se asciende a la libertad.
Diego Luis Córdoba (1907-1964)

La lectura es como el alimento; el provecho no está en proporción de lo que se come, sino de lo que se digiere.
Jaime Balmes (1810-1848)

NOMENCLATURA

Conjuntos	**Nombre**
U	Conjunto *Universal*
$\varnothing$	Conjunto *vacío*
$A \cup B$	*Unión* de los conjuntos A y B
$A \cap B$	*Intersección* de los conjuntos A y B
$A \subset B$	El conjunto A *está contenido en* B o también A es un subconjunto de B
$\complement_U(A) = \overline{A}$	Conjunto *complementario* de A respecto de U
$\overline{\overline{A}}$=A	El complementario de $\overline{A}$ es A
$A \subseteq B$	El conjunto A está contenido en B o es igual a B, o A es un subconjunto de B que puede coincidir con el conjunto B.
$A \cap B = \varnothing$	Conjuntos disjuntos, o sin elementos comunes.
$A \cap B \neq \varnothing$	Conjuntos no disjuntos.
$A - B = A \cap \overline{B}$	*Diferencia de conjuntos*. Conjunto formado por los elementos del primero que no son del segundo.
$a \in A$	El elemento *a pertenece* al conjunto A
$x \notin A$	El elemento *x* no pertenece al conjunto A
$\max\{x_1, x_2, ..., x_n\}$	El mayor de los elementos del conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
$\min\{x_1, x_2, ..., x_n\}$	El menor de los elementos del conjunto $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
Cuantificador $\forall x \in A$	*Para todo* elemento *x* perteneciente a A
Cuantificador $\exists\, x \in A$	*Existe al menos un* elemento *x* perteneciente a A
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Primera ley de De Morgan)	El complementario de $A \cup B$ y la intersección de los complementarios de A y de B son iguales.
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Segunda ley de De Morgan)	El complementario de $A \cap B$ y la unión de los complementarios de A y de B son iguales.
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$	*Cardinal, o número de elementos*, *de la unión de los conjuntos* A y B.
$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$	*Cardinal de la unión de los conjuntos* A y B *que son disjuntos.*
$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$	*Cardinal de la unión de tres conjuntos.*
$Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C)$	*Cardinal de la unión de tres conjuntos disjuntos dos a dos.*

NOMENCLATURA

Conjuntos numéricos	Nombre
$\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$	Conjunto de los números Naturales.
$\mathbb{Z}=\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$	Conjunto de los números Enteros.
$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \text{ siendo } a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$	Conjunto de los números Racionales, que son los que tienen un número finito de cifras decimales y también los decimales periódicos.
$\{\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5},\ldots,2\sqrt{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{4},\ldots,\pi,e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$ $1{,}101101110111101111110\ldots,\ 3{,}0100100010000100000 1\ldots,$ $1{,}2334445555666667777778888888999999990000000000022333\ldots,$ $\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4},e^2,\ldots\}$	Conjunto de los números Irracionales que son los números decimales no periódicos.
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números Reales, que son todos los números decimales tanto periódicos como no periódicos. El conjunto $\mathbb{R}$ está formado por todos los números Racionales y todos los números Irracionales.
$\mathbb{C}=\left\{a+bi \text{ siendo } a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}, i=\sqrt{-1}\right\}$	Conjunto de los números Complejos.

Alfabeto griego (minúscula y mayúscula)	Nombre
α A	alfa
β B	beta
γ Γ	gamma
δ Δ	delta
ε E	épsilon
ζ Z	zeta
η H	eta
θ Θ	theta
ι I	iota
κ K	kappa
λ Λ	lambda
μ M	my
ν N	ny
ξ Ξ	xi
o O	ómicron
π Π	pi
ρ P	ro
σ Σ	sigma
τ T	tau
υ Y	ypsilon
φ Φ	fi
χ X	ji
ψ Ψ	psi
ω Ω	omega

Lógica proposicional	**Nombre**
τ	Tautología, proposición siempre verdadera.
ϕ	Falacia, proposición siempre falsa.
p, q, r,…, a, b, c, …	Proposiciones. Una proposición es una frase que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez.
$p \vee q$	Disyunción de *p* y *q* (“*p* o *q”*).
$p \veebar q$	Disyunción exclusiva de *p* y *q* (“o *p* o *q”*).
$p \wedge q$	Conjunción de *p* y *q* (“*p* y *q”*).
$\overline{p}$ o también $\neg p$	Negación de la proposición *p* (“no *p”*).
$\overline{\overline{p}} = p$	En la lógica aristotélica la negación de la negación de *p* es *p*.
$p \rightarrow q$	Condicional “si *p* entonces *q”*
$p \leftarrow q$	Condicional “si *q* entonces *p”*
$p \leftrightarrow q$	Bicondicional o “*p* si y solo si *q”*
$a \Rightarrow b$	*a* implica *b.* Condicional tautológico.
$a \Leftarrow b$	*b* implica *a.* Condicional tautológico.
$p \Leftrightarrow q$	*“p* es equivalente a *q”* O también “*p* implica *q* y *q* implica *p”*
$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$ (Primera ley de De Morgan)	La negación de $p \vee q$ es igual a la conjunción de las negaciones de *p* y de *q*.
$\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$ (Segunda ley de De Morgan)	La negación de $p \wedge q$ es igual a la disyunción de las negaciones de *p* y de *q*.

Sucesos aleatorios	**Nombre**
E	Espacio muestral o Suceso seguro.
$\varnothing$	Suceso imposible.
$\mathrm{A} \subset \mathrm{E}, \mathrm{B} \subset \mathrm{E}$	A y B son sucesos del espacio muestral E, son subconjuntos de E.
$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$	El suceso A es una parte del suceso B $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ Si se verifica A también se verifica B.
$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$	Unión de los sucesos A y B.
$\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$	Intersección de los sucesos A y B.
$\overline{\mathrm{A}} = \complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$	Suceso contrario de A.
$\overline{\overline{\mathrm{A}}}$=A	El suceso contrario de $\overline{\mathrm{A}}$ es el mismo que A.
$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$ (Primera Ley de De Morgan)	El suceso contrario de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ y la intersección de los sucesos contrarios de A y de B son iguales.
$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$ (Segunda ley de De Morgan)	El suceso contario de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ y la unión de los sucesos contrarios de A y de B son iguales.

Circuitos eléctricos	**Nombre**
I	Cable conectado o cable con un interruptor siempre cerrado. Siempre pasa corriente.
ϕ	Cable cortado, o cable con un interruptor siempre abierto. Nunca pasa corriente.
a, b, c, …	Interruptores. Puede estar en dos posiciones: abierto, no conduce corriente, o cerrado, conduce corriente.
$a \oplus b$	Conexión de los interruptores *a* y *b* en paralelo. Pasa corriente si uno de los dos o ambos están cerrados.
$a \odot b$	Conexión de los interruptores *a* y *b* en serie. Pasa corriente solo si los dos están cerrados.
$\overline{a}$ o bien a'	Interruptor complementario o contrario al *a.* Está cerrado cuando *a* está abierto y Está abierto cuando *a* está cerrado.
$\overline{\overline{a}} = a$	El interruptor contrario de $\overline{a}$ es *a.*
$\overline{a \oplus \mathrm{b}} = \overline{a} \odot \overline{b}$ (Primera ley de De Morgan)	El circuito contrario del que tiene conectados los interruptores a y b en paralelo y la conexión en serie de los interruptores contrarios de *a* y *b* son iguales.
$\overline{a \odot \mathrm{b}} = \overline{a} \oplus \overline{b}$ (Segunda ley de De Morgan)	El circuito contrario del que tiene conectados los interruptores a y b en serie y la conexión en paralelo de los interruptores contrarios de *a* y *b* son iguales.

NOMENCLATURA

Obsérvese las analogías entre el álgebra de los subconjuntos de un conjunto U dado, la de las proposiciones, la de los circuitos eléctricos y la de los sucesos aleatorios. *Todas estas álgebras son casos particulares del Álgebra de Boole. Lo que significa que son isomorfas dos a dos.*

Postulados de Huntington para Álgebras de Boole

Un conjunto C en el que se han definido dos operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ y la complementación es un Álgebra de Boole si se verifican las siguientes propiedades:

P1. Conmutativas: $\forall a,b \in C \quad a \oplus b = b \oplus a$ y $a \odot b = b \odot a$

P2. Distributivas:

$$\forall a,b,c \in C \quad a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c) \text{ y también: } a \oplus (b \odot c) = (a \oplus b) \odot (a \oplus c)$$

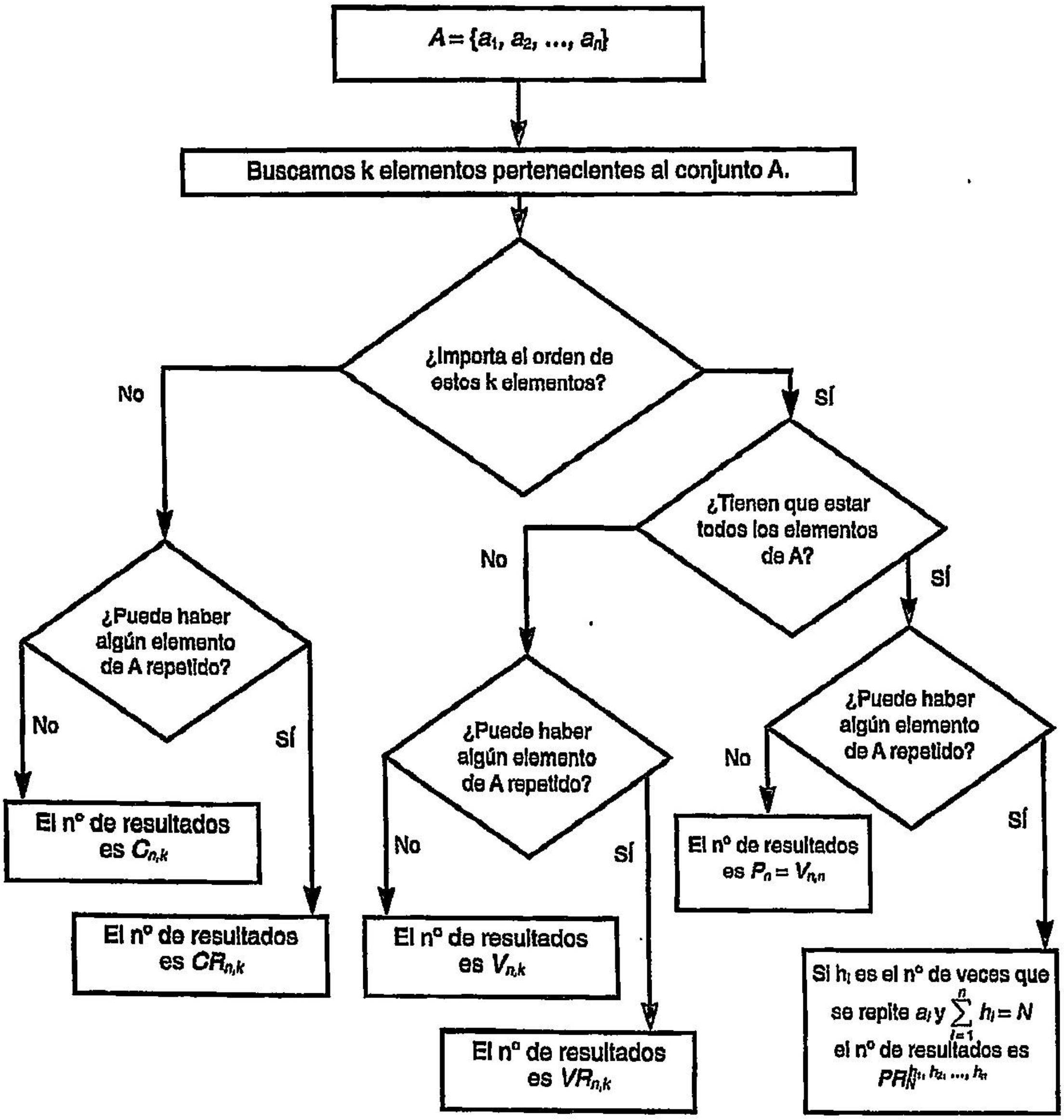
P3. Elementos neutros: $\varnothing$ e I que verifican:

$$\forall a \in C \quad a \oplus \varnothing = a \ \text{ y } \ a \odot I = a$$

P4. Todo elemento tiene su complementario: $\forall a \in C \ \exists\, \overline{a} \in C,$ tal que $a \oplus \overline{a} = \mathrm{I}$ y $a \odot \overline{a} = \varnothing$

Por la simetría de las dos operaciones, en toda Álgebra de Boole se cumple el *principio de dualidad*. Esto significa que si un teorema es válido, intercambiando $\oplus$ por $\odot$ y los elementos neutros entre sí, $\varnothing$ por I, se obtiene siempre otro teorema también válido.

ORGANIGRAMA PARA COMBINATORIA



Fórmulas de Combinatoria	**Nombre**
$P_n = n! = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .3.2.1$ siendo $n \in \mathbb{N}$	Número de *permutaciones de n elementos* o también factorial de *n*.
$VR_{n,k} = n^k$ siendo n y $k \in \mathbb{N}$	Número de *variaciones con repetición de n elementos de orden k.*
$V_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1).(n-2).\ \ldots\ .(n-k+1)$ siendo n y $k \in \mathbb{N}$ y $0 < k \leq n$	Número de *variaciones ordinarias de n elementos de orden k.*
$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ siendo $0 \leq k \leq n,\ n$ y $k \in \mathbb{N}$	Número de *combinaciones ordinarias de n elementos de orden k.*
$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$ siendo $k \in \mathbb{N}$	Número de *combinaciones con repetición de n elementos de orden k.*
$PR_N^{h_1,h_2,\ldots,h_n} = \dfrac{N!}{h_1!h_2!\ldots h_n!}$ siendo $N = \sum_{i=1}^{n} h_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$	Número de *permutaciones con repetición de n elementos de índices de repetición* $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *respectivamente.*

Propiedades de los números combinatorios

I. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

II. Triángulo de Pascal o triángulo de Tartaglia. Ordenación de los números combinatorios:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\ & & & & \vdots & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

III. En el triángulo anterior se ve fácilmente que: $\binom{n}{k}$ es la suma de $\binom{n-1}{k-1}$ y $\binom{n-1}{k}$ que están situados en la fila anterior, a su izquierda y a su derecha.

Es decir: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ siendo $n > 0$

IV. $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$

V. $(1+x)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$

VI. Caso particular del anterior:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Esto significa que el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos es 2^n.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1.- Si el conjunto $C=\{a,b,1,*,\circ,\triangleright,\{7,9\},z\}$ razonar cuáles de las siguientes expresiones tienen sentido y de estas cuáles son verdaderas:

$a\in C,\ C\in 1,\ 1\in C,\ C\in *,\ \{7,9\}\in C,\ \triangleright\in C,\ 7\in C,\ 23\in C,\ c\in C$

$z\in C,\ \{a,z,*\}\in C,\ \{a,z,*\}\subset C$

Solución

$a\in C,$ tiene sentido y es verdadera.

$C\in 1,$ no tiene sentido.

$1\in C,$ tiene sentido y es verdadera.

$C\in *,$ no tiene sentido.

$\{7,9\}\in C,$ tiene sentido y es verdadera.

$\triangleright\in C,$ tiene sentido y es verdadera.

$7\in C,$ no es verdadera.

$23\in C,$ no es verdadera.

$c\in C,$ no es verdadera.

$z\subset C,$ no tiene sentido.

$z\in C,$ tiene sentido y es verdadera.

$\{a,z,*\}\in C,$ no es verdadera.

$\{a,z,*\}\subset C,$ tiene sentido y es verdadera.

1.2.- Si $1\in\{3,x,8,2\}$, ¿qué se puede decir de *x*?

Solución

$x=1.$

1.3.- ¿Qué se puede decir de *x* si $x\in C=\{3,a,5,28\}$?

Solución

$x=3,\ x=a,\ x=5$ ó $x=28.$

1.4.- Escribir todos los subconjuntos del conjunto $C=\{3,a,5,28\}$ que tengan tres elementos.

Solución

$S_1=\{3,a,5\},\ S_2=\{3,a,28\},S_3=\{3,5,28\},S_4=\{a,5,28\}$.

1.5.- Si P es el conjunto de los números naturales pares e I es el conjunto de los números naturales impares, hallar $P \cap I$.

Solución

$P \cap I = \varnothing$ ya que no hay ningún número natural que sea par e impar a la vez.

1.6.- Si M_3 es el conjunto de los múltiplos enteros de 3 y M_2 es el conjunto de los múltiplos enteros de 2, hallar $M_3 \cap M_2$

Solución

$M_3 \cap M_2$ es el conjunto de los múltiplos enteros de 6 porque todo múltiplo de 6 es a la vez múltiplo de 2 y de 3.

1.7.- En la asignatura Biología Celular hay 150 alumnos matriculados y en Genética hay matriculados 115, ¿cuántos alumnos podrían asistir a clase en cada uno de los siguientes supuestos?:

a) Si las dos clases se impartieran a la misma hora y no hay ningún alumno matriculado en las dos asignaturas.

b) Si las dos clases se impartieran a la misma hora y hay 70 alumnos matriculados en las dos asignaturas.

Solución

a) Como se imparten a la misma hora y no hay ningún alumno matriculado en las dos asignaturas, podrían asistir a clase:

$$Card(B \cup G) = Card\left(B\right) + Card\left(G\right) = 150 + 115 = 265 \text{ alumnos.}$$

b) Si la hora de clase de las dos asignaturas coincide y hay 70 alumnos matriculados en las dos asignaturas, el número total de alumnos que podrían asistir a clase será:

$$Card(B \cup G) = Card\left(B\right) + Card\left(G\right) - Card(B \cap G) = 150 + 115 - 70 = 195 \text{ alumnos.}$$

1.8.- Una Empresa necesita cubrir 29 plazas, 13 tienen que ser ingenieros, 15 químicos y 13 matemáticos, exige que 6 sean ingenieros y matemáticos, 4 matemáticos y químicos y 5 ingenieros y químicos.

a) ¿Cuántos deberán tener las tres titulaciones?

b) ¿Cuántos deberán ser químicos e ingenieros pero no matemáticos?

c) ¿A cuántos que solo tengan la titulación de ingeniero se les puede ofrecer empleo?

Solución

a)

$$Card(I \cup Q \cup M) =$$
$$= Card(I) + Card(Q) + Card(M) - Card(I \cap Q) - Card(I \cap M) - Card(Q \cap M) + Card(I \cap Q \cap M)$$

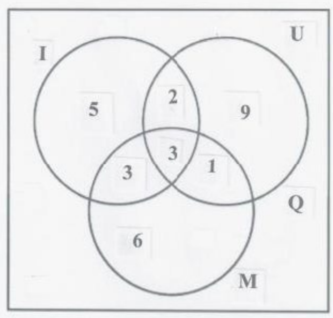
Por tanto:

29=13+15+13-6-4-5+ $card(I \cap Q \cap M) \Rightarrow$

$\Rightarrow Card(I \cap Q \cap M)$=29-13-15-13+6+4+5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow Card(I \cap Q \cap M)$=3 deberán tener las tres titulaciones.

Resumiendo los datos en un diagrama de Venn:



b) $Card(Q \cap I \cap \overline{M}) = Card(Q \cap I) - Card(Q \cap I \cap M) = 5 - 3 = 2$.

Deberán ser dos químicos e ingenieros pero no matemáticos.

c) Como el $Card(I \cap \overline{Q} \cap \overline{M}) = Card(I) - Card(I \cap M) - Card(M \cap Q) + Card(I \cap Q \cap M)$

$Card(I \cap \overline{Q} \cap \overline{M}) = 13 - 6 - 5 + 3 = 5$

Solo a cinco de los que tengan titulación de Ingeniero se les puede ofrecer empleo.

1.9.- La respuesta al anuncio correspondiente al ejercicio anterior fue la siguiente: acudieron 29, de los cuales 15 eran matemáticos, 16 químicos, 6 ingenieros y matemáticos, 5 matemáticos y químicos, uno químico e ingeniero y uno tenía las tres titulaciones.

a) ¿Cuántos ingenieros había?

b) ¿Qué puestos quedaron sin cubrir?

c) ¿Qué personas no consiguieron empleo?

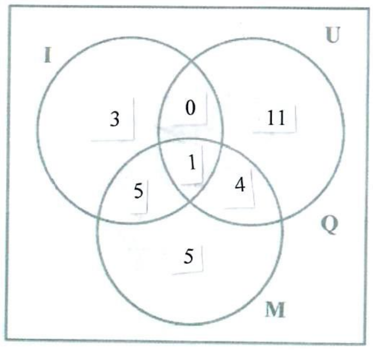
Solución

a) Para saber cuántos ingenieros había:

$$Card(I \cup Q \cup M) =$$
$$= Card(I) + Card(Q) + Card(M) - Card(I \cap Q) - Card(I \cap M) - Card(Q \cap M) + Card(I \cap Q \cap M)$$

Por tanto:

29=$Card(I)$+16+15-1-6-5+1 $\Rightarrow$ $Card(I)$=29-16-15+1+6+5-1=9 como se puede comprobar en el siguiente diagrama de Venn.



b) Un matemático, 2 ingenieros, 2 ingenieros y químicos y 2 con las tres titulaciones.

c) Dos químicos no ingenieros ni matemáticos, 3 matemáticos y químicos, 2 ingenieros y matemáticos.

1.10.- Comprobar que el condicional $p \rightarrow q$ es la misma proposición que $\overline{p} \vee q$ y también que la proposición $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ y, por tanto, las tres proposiciones son equivalentes.

Solución

Construimos las tablas de verificación, comenzando por las proposiciones simples que las componen, p y q. Como una proposición solo puede ser verdadera o falsa, pero no ambas cosas a la vez, todos los casos que se pueden dar de las dos proposiciones simples están indicados en las cuatro filas siguientes.

Por la definición de condicional, este es verdadero siempre que no sea verdadero el antecedente y falso el consecuente, esto significa que si el antecedente es verdadero para que lo sea el condicional también lo tiene que ser el consecuente, pero si el antecedente es falso entonces tanto si el consecuente es verdadero como si es falso, el condicional es verdadero.

p	q	$p \rightarrow q$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{p} \vee q$	$\overline{q} \rightarrow \overline{p}$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Como se observa en la tabla anterior, las tres proposiciones compuestas: $p \rightarrow q$, $\overline{p} \vee q$ y $\overline{q} \rightarrow \overline{p}$ tienen la misma tabla y, por ello, son equivalentes.

1.11.- Asisten a una conferencia cien personas de las que 50 hablan español, 45 inglés y 45 francés, 24 hablan español e inglés, 21 hablan español y francés, 15 hablan francés e inglés y 5 los tres idiomas.

a) ¿Cuántos no hablan ninguno de los tres idiomas?

b) ¿Cuántos hablan español y no francés?

c) ¿Cuántos hablan español y no hablan ni francés ni inglés?

d) ¿Cuántas de las personas que asisten a la conferencia hablan solo dos idiomas?

Solución

a) Como

$card\left(E\cup I\cup F\right)=$

$=card(E)+card(I)+card(F)-card(E\cap I)-card(E\cap F)-card(I\cap F)+card(E\cap I\cap F)=$

$=50+45+45-24-21-15+5=85$

No hablan ninguno de los tres idiomas: $100-card(E\cup I\cup F)$= 100-85 = 15 personas.

b) $card(E\cap \overline{F})=50-21=19$ hablan español y no francés.

c) $card(E\cap \overline{F}\cap \overline{I})=50-21-24+5=10$ hablan español pero no inglés ni francés.

d) $card(E\cap I)+card(E\cap F)+card(I\cap F)-3card(E\cap I\cap F)=24+21+15-15=45$ personas solo hablan dos idiomas.

1.12.- Simplificar y dar la expresión más sencilla posible para los siguientes conjuntos:

a) $(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)$

b) $(A\cap B)\cap\overline{\left(\overline{C}\cup A\right)}$

c) $B-(A\cap B)$

Solución

a)

$(A\cup B)\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=\left(A\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)\cup\left(B\cap\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\right)=$

$=\left(\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right)\cup\left(\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\left(B\cap\overline{B}\right)\right)=$

$=\left(\varnothing\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right)\cup\left(\left(B\cap\overline{A}\right)\cup\varnothing\right)=$

$=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(B\cap\overline{A}\right)=\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)$