CÁLCULO DIFERENCIAL

ALBERTO CAMACHO
Instituto Tecnológico de Chihuahua II (ITCh II)
México

CÁLCULO DIFERENCIAL

DIAZ DE SANTOS

Madrid • México • Buenos Aires • Bogotá

Ediciones Díaz de Santos
E-mail: ediciones@diazdesantos.es
Internet://http:www.diazdesantos.es

ISBN: 978-84-7978-892-6
Depósito legal: M. 50305-2008

Diseño de cubierta: Ángel Calvete
Fotocomposición e impresión: Fernández Ciudad
Impreso en España
Encuadernación: Rústica - Hilo

Dedico el presente trabajo a mis padres:
doña Elvira Ríos (q.e.p.d.) y don Juan Camacho.

Agradecimientos

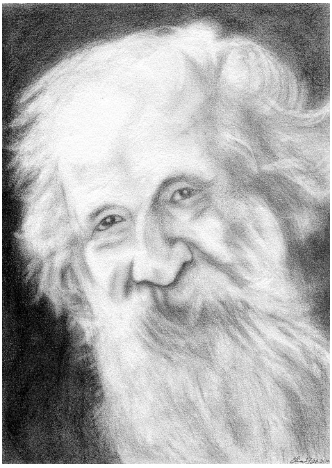
Varios de las fotografías e inserciones de fragmentos de texto pertenecen al dominio público, en ese sentido es difícil seguir la huella de los herederos de los autores a quien se debiera pedir el permiso de uso de los mismos.

1. Los oleos de Francisco Díaz Covarrubias y Gabino Barreda pertenecen al Colegio de San Ildefonso, el segundo fue realizado por el pintor Juan Cordero, ambos, junto con otros, se encuentran en el colegio en salón conocido como el *Generalito.*
2. El retrato de Gaston Bachellard es un diseño Maria Elisa Cabral. Se encuentra en el *Centre Bachellard* y en la ruta http://www.u-bourgogne.fr/CENTRE-BACHELARD.
3. La cita de Francisco Díaz Covarrubias, que aparece en el capítulo 1, fue tomada de su libro de cálculo llamado *Análisis Trascendente* publicado por F. R Castañeda y L. G. Rodríguez en 1873, tomado de una edición que posee el autor.
4. La cita de G. Barreda, del teorema que aparece al inicio del capítulo 3, aparece en el documento llamado: *Examen del Cálculo Infinitesimal bajo el punto de vista lógico.* Fue escrito por Barreda aproximadamente en 1870, y aparecido en la 3.ª edición de la Revista Positiva. Tipografía Económica, México 1908.
5. La figura 2.11, gráfica de una parábola diseñada por B. Bails, que aparece en la página 67, se encuentra en el texto llamado *Principios Matemáticos*, editado por la Viuda de Ibarra en Madrid en 1789, de una edición que posee el autor.
6. La portada del libro de texto llamado *Cálculo Infinitesimal* de F. Echeagaray, así como la cita (se aprecia al inicio del capítulo 2) fueron tomadas de la edición de 1897, de una edición de la obra que posee el autor.
7. La tabla física 2.2, p. 50, fue tomada del libro de Humboldt, llamado *Essai sur la géographie des plantes,* de la edición de Levrault, Shoell et Compagnie, 1805. De una edición de la obra que posee el autor.
8. Las fotografías de Alberto Barajas (en la introducción), Sotero Prieto (al inicio del capítulo 5) y Alfonso Nápoles (al iniciar el capítulo 6) pertenecen a la UNAM, se encuentran en la ruta http://www.matmov.unam.mx.
9. La portada del texto llamado *Curso abreviado de análisis* (Véase al inicio del capítulo 4) fue tomada de la edición de 1912, escrita por Arturo Lamadrid, de una edición de la obra que posee el autor.
10. El fragmento del texto de *Historia de las matemáticas* escrito por Sotero Prieto fue editado por el Instituto Mexiquense de la Cultura en 1991, véase al inicio del capítulo 5. Fue tomado de una edición de la obra que posee el autor.
11. El fragmento de la página 145 del *Analyse des infiniment petits* de L´Hôpital, escrito en 1696, fue tomado de una edición de la obra que posee el autor.
12. El fragmento de la página 341 del desarrollo de una función en serie colocada en el *Teatrise* de MacLaurin, fue tomada de la primera edición de la *Encyclopædia Británica* publicada en 1771.

ÍNDICE

Parte II. DERIVADAS, APLICACIONES DE LA DERIVADA, SERIES Y SUCESIONES

PREFACIO



GASTON BACHELARD (1884-1962)
Diseño de Maria Elisa Cabral, a partir de un retrato de Gaston Bachelard

«No ocurría lo mismo durante el periodo pre-científico del siglo XVIII. Entonces el libro de ciencia era bueno o malo. No estaba *controlado por la enseñanza oficial.*»

G. BACHELARD, *Epistémologie*

Hace unos meses escribí un artículo en el que deje ver cómo los autores de libros de texto de cálculo infinitesimal de los siglos XVIII y XIX, hicieron uso de recursos poco ortodoxos (nada semejantes a los actuales) para orientar y dar estructura metodológica a la escritura de sus obras [1]. La idea central que se observa con regularidad, en un buen número de documentos de los que hice análisis, es una *síntesis* que hacían los autores de las nociones principales de la matemática, como aquella de *cantidad*, *diferencial*, *infinito, cero,* entre otras, que les daba para determinar una primera *proposición sintética*, con la cual era posible iniciar la escritura de su obra.

Esta característica fue fundamental en la ciencia; así, en los *Principia* de Newton, él sintetizó la noción de cantidad definiéndola como aquello que *aumenta y disminuye,* agregándole la siguiente proposición: *con movimiento uniforme.* Algo semejante hizo Eu-

[1] Camacho, A. (2005): Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza Cinta de Moebio. *Revista Electrónica de Epistemología de Ciencias Sociales*. Universidad de Chile 2005, n.º 22, marzo. Primer documento de la revista. http://www.moebio.uchile.cl/22/index.htm.

Camacho, A. (2007): Sistemas Sintéticos. Síntesis de Conocimiento en los Manuales para la Enseñanza. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 471-492). México DF, México: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.

ler en sus *Principles de calcul;* L´Hôpital en el *Analyse des infiniment petits,* etc. En la enseñanza, la síntesis favoreció obras como *Traité du calcul différéntiel et integral de* Lacroix, los *Principios de cálculo infinitesimal* de Bèzout y, para la enseñanza del cálculo en México, el *Análisis trascendental* de Francisco Díaz Covarrubias. No obstante, la actividad de síntesis de obras científicas tuvo un clímax que culminó a finales del siglo XIX.

En la actualidad, los argumentos de síntesis de conocimientos para dar estructura a los libros de texto no tienen importancia, e incluso son desconocidos por aquellos que se han dedicado a su escritura a lo largo del siglo XX y lo que va del presente. No obstante, estas ideas se encuentran diluidas en los propios conceptos, como es el caso de la derivada y el límite. Consecuentemente, los problemas que hoy los autores abordan para el diseño de nuevas obras son de carácter didáctico, y tienen que ver más con los problemas de aprendizaje por parte de los estudiantes, a quienes se dirige el conocimiento.

Ante ello, el enfoque que he dado al presente libro es el de colocar diferentes *significados* en los conceptos más importantes del curso de Cálculo Diferencial, como son el de derivada, límite, función, etc., que considero pueden mejorar el entendimiento de los estudiantes. En este rubro, mi punto de vista es que el *conocimiento significativo* no solamente se refiere a la parte fenoménica que modela el saber, como comúnmente algunos le consideran, sino las diferentes *caras* o imágenes que el propio conocimiento a adquirido a lo largo de su definición. De esta forma, planteo el concepto de función desde nociones cercanas a ésta, poco consideradas por otros autores, como son las de *variable, variación* y *variabilidad,* sin dejar de lado sus significados ya conocidos de *fórmula, dependencia, modelo, gráfica,* etc. Para el concepto de límite he agregado a sus definiciones comunes la noción de *tolerancia*, que se usa comúnmente en los cursos de ingeniería, la cual sirve de puente para entender su definición formal a través de las cantidades épsilon y delta. De la misma manera, la definición de *sistema orgánico,* en el segundo capítulo, permite una mejor comprensión de las funciones exponencial y logarítmica. En lo que se refiere a la derivada, consigno para su definición imágenes cercanas a ésta, como son las de *diferencia* y *diferencial.*

Para dar definición a los argumentos fundamentales he usado la regla que llamo *ecuación de variaciones:* $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + B(\Delta x)^2 + C(\Delta x)^3 + \ldots$ como eje central que estructura la totalidad del texto.

El segundo capítulo es vasto en destrezas para el diseño gráfico de funciones; por ello, he integrado análisis más específicos de cada una de las más conocidas. Por su amplitud, he ubicado en el *Apéndice* un diseño, serie de secuencias didácticas, para que los estudiantes *construyan* gráficamente las funciones trigonométricas elementales de seno, coseno, tangente, etc., en actividades prácticas del aula, en equipos que a lo más les llevará un par de clases.

Con el objeto de reforzar los aprendizajes del curso, he agregado un número suficiente de problemas y actividades y ejercicios, a cada sección de trabajo. Finalmente, he creído conveniente no hablar con la formalidad de la matemática de teoremas, conceptos y objetos, así como demostraciones rígidas, puesto que el texto por sí mismo está dirigido a estudiantes que cursan estos conocimientos en el nivel de ingeniería y para los cuales importa más entender éstos desde la perspectiva de su carrera y no desde el punto de vista de la matemática formal. No obstante, desarrollé demostraciones, opcionales, necesarias para dar continuidad al texto, a partir de las nociones épsilon-delta, intentándolo mediante apoyos gráficos y algebraicos en cada caso.

ALBERTO CAMACHO

INTRODUCCIÓN

ALBERTO BARAJAS

«Las matemáticas son mucho más que una acrobacia intelectual. Son la creación humana por antonomasia. La única prueba de que el hombre tiene cierto derecho a llamarse racional. En muchas actividades, lo vemos a diario, parece un ser loco, irracional, motivado por instintos crueles. Las matemáticas tienen un valor cultural, existencial, excepcional. Si este valor se pierde de vista y se les reduce sólo a una acrobacia intelectual, van a perder su magia».

Carta-entrevista de la Sociedad Matemática Mexicana, noviembre de 1996

ALBERTO BARAJAS: matemático mexicano, profesor de la UNAM que publicó sus primeros trabajos sobre gravitación, impulsado y asesorado por Birkhoff, en 1930.

Uno de los conceptos fundamentales en la enseñanza del cálculo es el de número. El concepto surgió en la antigüedad griega utilizándolo como magnitudes de segmentos de líneas; esta noción fue ampliándose y generalizándose con el tiempo. En la época de la invención del cálculo, el número no se colocaba en una estructura numérica como ahora lo conocemos. Ante ello, en las definiciones que surgieron de los primeros analistas o geómetras, así eran llamados matemáticos de los siglos XVII al XIX, podemos percibir las formas de inicio de la definición actual. Por ejemplo, Newton los concebía «como la relación de una cantidad cualquiera a otra de su misma especie que hayamos elegido por medida o unidad». Esta expresión es la que sustenta la definición rigurosa que a principios del siglo XX, en 1901, estableció Lebesgue para la *medida,* viéndola como *La medida $m(p)$ toma valores reales no negativos*. No obstante, la idea de Newton tuvo una amplia aceptación, de manera que para finales del siglo XVIII, se había posicionado, sobre todo, en la enseñanza de la matemática.

Así, en la Escuela Politécnica francesa se enseñaba una definición semejante a la de Newton que fue establecida por S. F. Lacroix en su libro de cálculo llamado *Calcul Différentiel et Integral*. La definición reza lo siguiente: «Por la voz cantidad entendemos todo aquello cuya magnitud por su naturaleza es comparable con otra de su misma especie, de modo que con esta comparación se pueda determinar, y con el auxilio de algún ***número*** expresar la mutua relación de entre ambas». El número, así como lo expresaba Lacroix, es aquella magnitud que puede asemejarse a una cantidad; en tanto las cantidades son vistas como magnitudes físicas: rectas, áreas, volúmenes, etc., es decir, y usando palabras actuales, el número es la *medida* de la cantidad.

En México, las ideas newtonianas de número fueron conocidas en el Seminario de Minería, primera escuela de ingeniería del país, desde finales del siglo XVIII, gracias al uso que hacían los estudiantes del texto del autor español B. Bails, llamado *Principios Matemáticos*. Bails dejaba ver que la única manera de entender aquello que es número, es «saber primero que cosa es unidad». Luego, afirmaba: «unidad llamamos una cantidad que se toma o elige (las más veces a arbitrio) para que sirva de término de comparación respecto de todas las cantidades de su misma especie». La cantidad fue puesta en el mismo sentido físico de las magnitudes: o sea, en la manera de medir la magnitud de: pesos, áreas, longitudes, etc.

Las cantidades, en los autores mencionados, eran conocidas como *aquello que aumenta y disminuye*. Solamente aquello que aumenta y disminuye podía tomar la nominación de cantidad. Los números caen dentro de esa caracterización, también se colocan en ella las magnitudes físicas, como las líneas rectas, las áreas, etc. Esta idea surge de un contexto geométrico muy sencillo que tiene que ver con el potencial creativo de la imaginación: las cantidades que aumentan o disminuyen lo hacen solamente si se encuentran en movimiento. Un punto al desplazarse genera una recta, consecuentemente una recta genera un plano, y un plano en movimiento lleva a un sólido. En el sentido del movimiento, las cantidades fueron el núcleo de estudio de la matemática de los siglos XVIII, XIX y XX.

Por su característica de aumentar o disminuir, podemos suponer las cantidades como magnitudes variables, de hecho una cantidad es una variable. Esta idea asigna una categoría a las cantidades que solamente fue reconocida por Newton y Leibniz; idea que habremos de explorar con detalle más adelante.

No obstante, sería hasta 1887 que las ideas sobre las *cortaduras* de los números reales de R. Dedekind tendrían una profunda influencia sobre los fundamentos de la matemática a través del concepto de número. Dedekind dividió en *clases* los números racionales; cada clase es una cortadura, de manera que los pudo ordenar entre *elementos máximos, elementos mínimos*, el establecimiento de los racionales negativos, el cero, etc. En los casos en que las clases no contemplan elementos máximos o mínimos, la cortadura establece un número irracional. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 2 es una cortadura entre todos los números negativos y entre aquellos que tengan un cuadrado inferior a 2 y entre los números que tengan un cuadrado superior a 2. Es esta actualmente una de las definiciones estándar de los números reales.

Un método más concreto lo daría G. Cantor; para éste, los números reales se debían considerar como decimales de infinitas cifras y, además, los decimales infinitos fueron vistos como límites de fracciones decimales finitas. Por ejemplo la sucesión de números decimales tiene por límite al número racional.

Las ideas de Dedekind y Cantor serían puestas en la escena de la enseñanza desde principios del siglo XX en la Escuela Politécnica, manuales para la enseñanza del cálculo como el de M. Duhamel, *Cours d´Analyse de l´École Polytechnique* de principios del siglo XX, así como el texto de Reygnaud-Hadamard llamado *Problémes et dèveloppmens sur diverses parties des mathématiques* (de la versión de 1823), así lo evidencian. Por ejemplo, en el texto de Reygnaud-Hadamard se habla de una «teoría de los inconmensurables», como: «toda relación que se de entre dos números de cualquier valor conmensurable, se dará luego que devengan inconmensurables, porque ellos pueden ser considerados como límites de números conmensurables».

En México estas ideas se llegaron a enseñar en la Escuela Nacional Preparatoria desde 1905; el profesor de esta escuela, A. Lamadrid, escribió un *Curso abreviado de análisis* en el que desplegó un amplio conocimiento y manipulación algorítmica de los números racionales, conversión de decimales inconmensurables a fracciones, haciendo uso del concepto de límite; de ello, Lamadrid afirmaba: «el límite de una fracción decimal periódica simple, es un quebrado cuyo numerador es el periodo, y cuyo denominador es un número formado por tantos nueves, como cifras tiene el periodo».

La propuesta de números como límites de sucesiones y cortaduras, de Cantor y Dedekind, son complementarias y prevalecen actualmente en la enseñanza matemática. En nuestro caso, esas dos ideas darán orientación al curso de cálculo diferencial que enseguida planteamos, toda vez que las retomamos en el contexto que el propio curso debe colocarse. Tomaremos también, como agregado fundamental del curso, la noción de cantidad, parte intrínseca del estudio de los fenómenos de variación del cálculo. El *número* será visto como la medida absoluta de las cantidades y, estas últimas, como aquello que tiende a aumentar o disminuir en tanto su posibilidad aritmética y física.

Parte I
Números reales, funciones y límites

Números reales 1

FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS (1833-1889)

«El conjunto del álgebra presenta otro ejemplo del artificio de que tratamos, pues nacida esta ciencia con posterioridad a la aritmética, quiere decir a la ciencia que se ocupa de del cálculo de los *valores*, prescinde completamente de toda idea concreta de *número* para no especular mas que sobre ideas abstractas de *relación*; y entonces el carácter eminentemente generalizador de esta concepción, le permite servirse de signos o símbolos auxiliares, que si bien no representan por sí mismos valor alguno, pueden representar cualquiera valor imaginable».

FRANCISCO DÍAZ COVARRUBIAS

Ingeniero mexicano, autor del primer libro de *Cálculo Infinitesimal*, escrito para la enseñanza preparatoria en 1873.

1.1. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES. ENTRE CONTAR Y MEDIR

El *sistema de los reales* consiste de un conjunto de elementos denominados números que dan sentido a las operaciones fundamentales conocidas como suma, resta, multiplicación, división, resolución de ecuaciones y procesos algebraicos, entre otras que utilizarás en este y otros cursos. Generalmente, la mayoría de los textos de matemáticas representan los números reales con el símbolo $\mathbb{R}$. De aquí la siguiente proposición:

Los números, tal y como los concebimos en la actualidad, son símbolos despojados de cualquier referencia a objetos concretos.

[1-1]

1.1.1. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Estos pueden ser cantidades de libros, personas, edades, etc. Los números en general sirven para *contar* elementos de conjuntos de ese tipo de objetos. Sin embargo, los números tienen una cualidad aún más importante, que es aquella de *medir* cantidades físicas, longitudes, áreas, volúmenes, etc.

Las operaciones del cálculo se sustentan en el sistema de los números reales y en sus propiedades, por lo tanto empezaremos por clasificarlos y conocerlos. En este sentido será necesario que te familiarices con las operaciones que en el curso realizarás con ellos.

Antes, recordemos algunas de las propiedades elementales de los números reales, que has utilizado desde tus cursos en la preparatoria. La importancia de estas propiedades radica en que mediante ellas puedas hacer combinaciones que te lleven a la obtención de otros números de igual naturaleza que los reales. Como se verá más adelante, estas propiedades se adecuan bien a determinadas clases de números y no a otros.

Propiedad transitiva de la igualdad. Si $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$. Por ejemplo: Sí $3 = 3$ y $3 = 3 \rightarrow 3 = 3$. Propiedad conmutativa de la suma y de la multiplicación: $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$. Ejemplos: $\frac{2}{5} + 7 = 7 + \frac{2}{5}$, $4(5) = 5(4)$. Propiedad asociativa de la suma y multiplicación: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c$. Por ejemplo: $4 + (3 + 2) = (4 + 3) + 2$, $5 \cdot (8 \cdot 7) = (5 \cdot 8) \cdot 7$. Propiedad del inverso: para cada número real a, existe un único número real denotado por $-a$, tal que: $a + (-a) = 0$, el número $-a$ es llamado inverso aditivo de a. Para cada número real a, excepto el cero, existe un único número real denotado por a^{-1}, tal que: $a \times a^{-1} = 1$ o $a \times \frac{1}{a} = 1$, el número a^{-1} es llamado el inverso multiplicativo de a. Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$.

Un número real puede ser positivo, negativo o cero e identificarse por *clases* de números. Los hay de dos clases: racionales e irracionales. Un número racional es cualquier número que se puede expresar como la razón de dos enteros como 1, 2, $\frac{1}{2}$, -5, 0,25, 4,222…, etc.; es decir, en la forma $\frac{p}{q}$, donde las literales p y q representan números enteros, de modo que q sea distinta de cero. De está división se obtienen resultados enteros, fracciones o decimales. Por su lado, la clase de los números irracionales son aquellos que no se pueden expresar como la razón de dos enteros, de ahí su denominación.

1.1.2. OPERACIONES CON LOS RACIONALES E IRRACIONALES

En este momento lo más importante es conocer ambas clases de números; más adelante, en la sección 1.3.1, te sugerimos ideas para definirlos y, además, hacer una construcción de ellos.

De acuerdo a lo anterior, un número racional es considerado como la división de dos enteros. Por ejemplo, $\frac{11}{3}$ es un número racional y se puede expresar también en forma decimal como su división: 3,666666666666…

¿Qué observas en sus decimales?

A manera de ejercicio, cambia los siguientes números racionales a decimales mediante una división (realízala manualmente):

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{11}$

c) $\frac{5}{37}$

d) $\frac{11}{13}$

e) $\frac{269}{990}$

¿Qué observas en sus decimales?

Analicemos los resultados de los casos anteriores:

a) 0,25
b) 0,181818181818…
c) 0,135135135135…
d) 0,846153846153…
e) 0,2717171717171…

Se aprecia que en el inciso a) 0,25, sus decimales son finitos y en los incisos restantes son infinitos. ¿Qué entiendes por finito e infinito?, he ahí la diferencia: entre los decimales conmensurables (decimales que tienen un número determinado de cifras) y los decimales inconmensurables (decimales infinitos), que además se les llama periódicos, porque las cifras de sus decimales se repiten, por ejemplo en el inciso b) sus decimales se repiten cada 2 periodos; en el c) cada 3; en el d) cada 6 y en el e) cada 2, a partir del segundo decimal.

Los números decimales que no guardan un periodo en sus cifras, o bien no resultan de la división de dos enteros, se les llama números irracionales, por ejemplo el número: 1,41421356237… = $\sqrt{2}$.

EJEMPLO 1

De acuerdo a lo anterior, intenta clasificar el siguiente número real: 0,333333… ¿Es un número racional? ¿Por qué? Observa que después del punto decimal se repite la cifra 3 cada un periodo.

Luego ¿cuál es la razón de dos enteros $\frac{p}{q}$ que equivale a 0,333333…?

SOLUCIÓN:

Para resolver esto último, consideremos que x simboliza la razón de los dos enteros $\frac{p}{q}$; por lo tanto partimos de:

$$x = 0{,}333333\ldots \quad (1)$$

Como el 3 se repite cada un periodo, entonces multiplicamos por 10 ambos lados de la expresión, quedándonos:

$$10x = 3{,}33333\ldots \quad (2)$$

Restamos las ecuaciones (2) de (1), obtenemos:

$$\begin{array}{r} 10x = 3{,}33333\ldots \\ x = 0{,}3333\ldots \\ \hline 9x = 3 \end{array}$$

Despejando x, nos queda que:

$$x = \frac{3}{9}, \text{ o bien: } x = \frac{1}{3}$$

Lo cual muestra que 0,333333…, es un número racional de la forma $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$. Donde $p = 1$ y $q = 3$.

EJEMPLO 2

De manera similar podemos probar que el número 2,34525252…, representa un número racional en la forma $\frac{p}{q}$.

SOLUCIÓN:

Digamos que x simboliza la razón de dos enteros, por lo tanto partimos de $x = 2{,}3452525252\ldots$ Para llegar al resultado que se busca, debemos dejar del lado izquierdo del punto decimal la parte ,34 que se encuentra fuera del periodo. Para ello es necesario que multipliquemos por 100, quedándonos:

$$100x = 234{,}525252\ldots \quad (1)$$

Como esta última se repite cada dos periodos, o cifras, multiplicamos de nuevo por 100, de modo que nos quede:

$$10.000x = 23.452{,}525252\ldots \quad (2)$$

¿Se ha comprendido el truco?
Restamos la segunda ecuación (2) de la primera (1), y obtenemos:

$$\begin{array}{r} 100x = 234{,}525252\ldots \\ 10.000x = 23.452{,}525252\ldots \\ \hline 9.900x = 23.218\ldots \quad (3) \end{array}$$

Despejando x de 3, nos queda que:

$$x = \frac{23.218}{9.900}$$

De esta manera probamos que 2,3452525252…… $= \dfrac{23.218}{9.900}$ es un número racional, puesto que resulta de la división de dos enteros $p = 23.218$ y $q = 9.900$. Podemos concluir que, como se menciona en la tabla anterior:

Los decimales periódicos son números racionales.

[1-2]

En el caso de las representaciones decimales de números irracionales, estas no se repiten en periodos iguales. Por ejemplo, el número irracional (construido a propósito):

0,1010010001000010000…

O bien el conocido número irracional π (pi), que es equivalente a 3,14159265358979323846264 3…, con 16 cifras decimales que da la calculadora.

Por lo general los números irracionales de más utilidad se simbolizan con expresiones que pueden ser: literales, radicales, logarítmicas y trigonométricas. Los siguientes son solamente algunos ejemplos:

a) $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488\ldots$
b) $\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935 27\ldots$
c) $\cos 23^0 = 0{,}920504853\ldots$
d) $e = 2{,}718\ldots$
e) $\ln 2 = 0{,}69314718\ldots$

Casos inmediatos de números irracionales son todas las raíces de los números primos, por ejemplo las raíces: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, etc. Por lo general, al hacer uso de irracionales en los problemas de ingeniería, estos se *redondean* a conveniencia a solamente un determinado número de cifras, lo cual los convierte en números racionales comunes. Por ejemplo 3,1416 es el número π, 3,14159265358979323846264 3…, redondeado a cuatro cifras decimales. Los casos de raíces de potencias, no primos, como: $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, etc., no caen en esta clasificación. ¿Por qué?

1.1.3. LA DIVISIÓN POR CERO EN LOS RACIONALES

¿Por qué en la expresión racional $\dfrac{p}{q}$, q debe ser distinta de cero?

¿Qué puedes comentar del número $0 = \dfrac{0}{2}$? Como puedes ver en este caso, el numerador es cero y el denominador cualquier entero diferente de cero, es decir, es un número racional. En expresiones de este tipo resulta fácil caer en el error de construirlos con el denominador igual a cero. Es común escribir equivocadamente $\frac{5}{0} = 0$. También es cotidiano decir que $\frac{0}{0} = 1$. O bien establecer que la operación entre cero es infinito, por ejemplo $\frac{3}{0} = \infty$. Los primeros dos casos son completamente falsos. En principio hay que tomar en cuenta que:

> *La operación de dividir por cero no es una operación valida dentro de las propiedades de los números reales.*

[1-3]

Puedes verificar que esta proposición no se encuentra en las propiedades antes vistas. También es congruente aclarar que la operación es indeterminada, es decir, no existe un número real que sea solución de esa operación.

En el tercer caso $\frac{3}{0} = \infty$, se hace uso de una *convención*, es decir, algo que conviene sin de pronto ponerlo ha discusión, debido a que ofrece resultados ciertos y congruentes. Granville, en su texto de Cálculo, convino a principios del siglo pasado (1902) los siguientes casos particulares más frecuentes. Propuso estos:

$$\frac{c}{0} = \infty,\ c \cdot \infty = \infty,\ \frac{\infty}{c} = 00 \ \text{ y } \ \frac{c}{\infty} = 0$$

[1-4]

Aunque de momento las aceptemos, estas expresiones obedecen a resultados de procesos que tienen que ver con el concepto de límite que se estudiará más adelante.

1.1.4. LOS NÚMEROS REALES COMO SUCESIONES

1.1.4.1. Racionales que atraen racionales

Consideremos el segmento de recta entre los números 0 y 1, y hagamos una partición o bisección a la mitad, quedándonos $\frac{1}{2}$; ahora hagamos la misma operación al segmento 0 y $\frac{1}{2}$, del cual nos queda $\frac{1}{4}$; prosiguiendo el proceso de bisección obtendremos sucesivamente los números $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$, etc. De esta manera hemos generado la sucesión de números racionales, en el segmento 0 y 1, siguiente [1]:

[1] Las sucesiones de números reales serán vistas con más detalle en el Capítulo 6, de momento intentamos convenir en su utilidad, sin menoscabo de las definiciones que de estas se darán en esa unidad.

$$\mathbf{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots, \mathbf{0}$$

Como se aprecia en esta sucesión, sus últimos términos: $\ldots, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \ldots,$ son atraídos hacia el cero **0** y se encuentran bastante cerca de éste.

¿Qué significa el cero para esta sucesión?

No obstante, nos podemos acercar aún más al cero, valores más próximos de este son las siguientes particiones: $\frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \frac{1}{1.024}$ y $\frac{1}{2.048}$.

¿Pero hasta dónde nos podemos acercar con este procedimiento al cero como valor extremo? Si hacemos las diferencias entre el cero y cada una de las cuatro últimas aproximaciones obtendremos los siguientes valores: 0,003, 0,001, 0,0009, 0,00048. Estos muestran qué tanto nos hemos acercado al cero. Lo que resulta interesante de la experiencia es que *nos hemos acercado a ese valor tanto como lo deseamos*, teniendo por último valor de referencia al extremo elegido, en este caso el cero. De aquí podemos afirmar la proposición siguiente:

> *En la construcción de una sucesión de valores numéricos, a partir de dos valores asignados, nos podemos acercar tanto como deseemos a cualquiera de estos.*

[1-5]

Utilizando esta idea genera enseguida una sucesión de números racionales en el mismo segmento 0 y 1, cuyos últimos términos sean atraídos por el 1. Es claro que hay que biseccionar entre 1 y $\frac{1}{2}$. Intenta acercarte lo suficiente de manera que la distancia entre el extremo y el último valor numérico que tomes sea del orden de $\frac{1}{100.000}$.

1.1.4.2. Sumas geométricas

Como en el caso anterior: ¿Qué significa el uno para esta última sucesión?

Otra manera para determinar el cociente $\frac{p}{q}$ que le corresponde a un número decimal periódico es la de representar el número como la suma de una *serie geométrica* de racionales. Por ejemplo, representemos el número racional 2,75111111111…, como una suma geométrica de números racionales. Tomando el periodo como 11, es posible escribir el número de acuerdo a su posición decimal como la suma inconmensurable:

$$2 + \frac{75}{100} + \frac{11}{10.000} + \frac{11}{1.000.000} + \frac{11}{100.000.000} + \frac{11}{1.000.000.000} + \ldots$$