Oleksandr Karelin

Carlos Rondero Guerrero

Anna Tarasenko

DESIGUALDADES

Métodos de cálculo no tradicionales

Patrocinado por:

Universidad Autónoma
del Estado de Hidalgo

DIAZ DE SANTOS

Madrid - Buenos Aires - México

Ediciones Díaz de Santos

www.diazdesantosmexico.com.mx (México)
www.diazdesantos.es/ediciones (España)
www.diazdesantos.com.ar (Argentina)

ISBN: 978-84-7978-807-0
Depósito legal: M. 10.777-2008

Fotocomposición: Estefanía Grimoldi
Diseño de Cubierta: Ángel Calvete
Impresión: Fernández Ciudad
Encuadernación: Rústica-Hilo

Índice

Introducción

Este libro esta compuesto de dos partes. La primera parte está diseñada pensando en la preparación de alumnos de alto rendimiento, siendo uno de sus objetivos, el cubrir la ausencia en los libros de texto de matemáticas, de diversos temas correspondientes a las desigualdades en la currícula del nivel medio superior y superior.

Los autores basándose en la experiencia acumulada, tanto en la preparación de alumnos como con la formación de profesores de matemáticas, proponen el estudio de las desigualdades, dado que es un tema que tiene el carácter de eje articulador de saberes matemáticos, lo cual permite preparar el camino de acceso a otros niveles de complejidad, como límites, derivación e integración, entre otros, y en consecuencia poder resolver problemas matemáticos con enfoques diferentes.

En la segunda parte del libro se presenta un enfoque no tradicional en la búsqueda de la recta tangente, para el caso de funciones elementales, sin el uso de la derivada, y se demuestran las propiedades de la recta tangente para funciones formadas por operaciones aritméticas. Por supuesto, en el desarrollo de este tema aparece de manera relevante la teoría de las desigualdades.

Esperamos que el contenido del libro, dé nuevas perspectivas a alumnos y profesores acerca del tratamiento tanto de las desigualdades como del cálculo de la recta tangente de una función, sin perder de vista su aspecto didáctico, dada su importancia en el aprendizaje de las matemáticas.

Los Autores
Octubre de 2007

Representamos un polinomio de tercer grado dado en la forma general

(18) $$P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

en la forma canónica o verticial

$$P_3(x) = k_3(x-h)^3 + k_1(x-h) + k_0.$$

Para poder seguir la herencia de las ideas que se usan en el estudio de la parábola, vamos a reducir (18) a forma verticial por medio de completacion de un cubo perfecto:

$$P_3(x) = a_3\left[x^3 + 3\frac{a_2}{3a_3}x^2 + 3x\left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 - 3x\left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 - \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3}\right] =$$

$$= a_3\left[\left(x + \frac{a_2}{3a_3}\right)^3 - 3x\left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 - \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3}\right].$$

Formamos el vértice $V\left(-\frac{a_2}{3a_3}, P_3(-\frac{a_2}{3a_3})\right)$ y escribimos el polinomio $P_3(x)$ en el forma verticial:

$$a_3\left[\left(x + \frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + \left(-3\left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + \frac{a_1}{a_3}\right)\left(x + \frac{a_2}{3a_3}\right) - \left(-3\left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + \frac{a_1}{a_3}\right)\frac{a_2}{3a_3} - \left(\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + \frac{a_0}{a_3}\right],$$

obtenemos

(19) $$P_3(x) = k_3(x-h)^3 + k_1(x-h) + k_0,$$

donde los fórmulas de interrelación biunívoca entre los coeficientes son,

$$h = -\frac{a_2}{3a_3}, \qquad k_3 = a_3$$

$$k_1 = 3a_3\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + 2a_2\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) + a_1$$

$$k_0 = P_3\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) = a_3\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^3 + a_2\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right)^2 + a_1\left(-\frac{a_2}{3a_3}\right) + a_0$$

$$a_2 = -3hk_3,\ a_1 = 3k_3(-h)^2 + k_1,\ a_0 = P_3(0) = k_3(-h)^3 + k_1(-h) + k_0$$

Subrayamos otra vez, que el término de segundo grado $k_2\,(x-h)^2$ no está, $k_2 = 0$, que permite analizar la función $y = P_3\,(x)$ por los métodos más fáciles que en caso de la representación general.

Del análisis de una sistema

(20) $$\begin{cases} y = k_3(x-h)^3 + k_1(x-h) \\ y = -k_0 \end{cases}$$

que es equivalente la ecuación

$$k_3(x-h)^3 + k_1(x-h) + k_0 = 0$$

Pasamos al análisis de la relevación de los máximos y mínimos locales.

Los puntos mínimos y máximos de la función

$$y = k_3(x-h)^3 + k_1(x-h) + k_0$$

coinciden con los puntos máximos y mínimos de la función

$$y = \tilde{P}_3(x), P_3 = k_3(x-h)^3 + k_1(x-h) \quad \text{y} \quad y = (x-h)^3 + \frac{k_1}{k_3}(x-h)$$

cuando $k_3 > 0$; y se cambian entre sí, cuando $k_3 < 0$.

Vamos a contar $k_3 > 0$.

Por definición del punto mínimo local $p_{\min}$ de la función

$y = (x-h)^3 + \dfrac{k_1}{k_3}(x-h)$ debe cumplirse la desigualdad

(21) $$(z + p_{\min} - h)^3 + \frac{k_1}{k_3}(z + p_{\min} - h) \geq (p_{\min} - h)^3 + \frac{k_1}{k_3}(p_{\min} - h)$$

para suficiente pequeños valores de z, es decir, existe un número positivo $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier x, $|x| < 0$ sigue (21). Por aquí $p_{\min}$ es punto mínimo lo que buscamos, pues el punto donde la función logra su valor mínimo local.

Después de las transformaciones la desigualdad (21) se reduce a la forma,

(22) $$z[z^2 + 3z(p_{\min} - h) + 3(p_{\min} - h)^2 + \frac{k_1}{k_3}] \geq 0$$

Factorizando la parte derecha vamos a tener

(23) $$z(z-z_1)(z-z_2)\geq 0,$$

donde

$$z_{1,2}=-\frac{3}{2}(p_{\min}-h)\pm\sqrt{\frac{9}{4}(p_{\min}-h)^2-[3(p_{\min}-h)^2+\frac{k_1}{k_2}]}$$

Cuando

$$\omega\equiv 3(p_{\min}-h)^2+\frac{k_1}{k_2}\neq 0,$$

la función $y=z(z-z_1)(z-z_2)$ al pasar por el punto $z=0$ cambia su signo. Por lo tanto la desigualdad (22) no se cumple en el entorno de este punto.

Cuando

$$\omega\equiv 3(p_{\min}-h)^2+\frac{k_1}{k_2}=0,$$

la desigualdad (23) se convierte en

(24) $$z^2[z+3(p_{\min}-h)\geq 0$$

Dicha desigualdad se cumple en una vecindad del punto $z=0$.

Entonces el punto mínimo es

$$p_{\min}=h+\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}}$$

La curva $y=\tilde{P}(x)$, es simétrica a respecto al punto $P\,(h,0)$. De manera que el punto máximo será simétrica al respecto del punto mínimo, es decir

$$p_{\max}=h-\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}}$$

Ahora los valores extremos de la función

$$\tilde{P}_3(x)=k_3(x-h)^3+k_1(x-h)$$

son:

$$\tilde{y}_{\min} = \tilde{P}_3(p_{\min}) = k_3(\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}})^3 + k_1(\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}}) =$$

$$= \sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}}(\frac{-k_1}{3} + k_1) \quad \text{o} \quad \tilde{y}_{\min} = \frac{2k_1}{3}\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}} \ ;$$

$$\tilde{y}_{\max} = \tilde{P}_3(p_{\max}) = -\frac{2k_1}{3}\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}} \ .$$

Los puntos críticos de la función dada $y = P_3(x)$ son: $x_{\min} = p_{\min}$, $x_{\max} = p_{\max}$, los valores extremos son:

$$y_{\min} = P_3(x_{\min}) = \tilde{P}_3(p_{\min}) + k_0 = \tilde{y}_{\min} + k_0 = \frac{2k_1}{3}\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}} + k_0$$

$$y_{\max} = P_3(x_{\max}) = \tilde{P}_3(p_{\max}) + k_0 = \tilde{y}_{\max} + k_0 = -\frac{2k_1}{3}\sqrt{\frac{-k_1}{3k_3}} + k_0$$

La función $y = x - sen\, x$ crece en D. Su valor mínimo logra en punto inicio $x = 0$, $f(0) = 0 + sen\ 0 = 0$. Tenemos la desigualdad $f(x) > 0$, $x - sen\ x > 0$ que y fue necesario demostrar.

Ejemplo 2:

Demostrar $e^x > 1 + x, \quad x \in D, \quad D = (0, +\infty)$.

La derivada de la función $f(x) = e^x - 1 - x$ es igual a $f' = e^x - 1$, la es positiva.

Esto significa que $y = e^x - 1 - x$ crece. Su valor mínimo $f(0) = 0$, de aquí $f(x) > 0$, entonces

$$e^x - 1 - x > 0 \quad \text{y} \quad e^x > 1 + x.$$

En ciertos casos para demostrar de desigualdades $\varphi(x,y) > g(x,y)$

$$(\ \varphi(x,y) \geq g(x,y), \varphi(x,y) < g(x,y), \varphi(x,y) \leq g(x,y)\ )$$

en un conjunto cerrado y acotado D es necesario seguir tal esquema:

1. Pasar a la desigualdad $f(x, y) > 0$, donde $f(x,y) = \varphi(x,y) - g(x,y)$.
2. Encontrar los valores de f en los puntos críticos de f en D.
3. Encontrar los valores extremos de f en la frontera de D.
4. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos: el más grande de los valores es el valor máximo absoluto, el más pequeño de los valores es el valor mínimo absoluto.
5. Y llevar un análisis del cumplimiento de la desigualdad $f(x) > 0$.

Recordamos que una función de dos variables tiene un máximo (mínimo) local en un punto $Z = (a,b)$ si $f(x,y) \leq f(a,b)$, cuando (x, y) esta cerca de (a,b), por otras palabras, cuando existe $\varepsilon > 0$ que $f(x,y) \leq f(a,b)$ en el disco $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon$.

Analógicamente se define mínimo local.

Ejemplo 3:

Demostrar que

$0 \le x^2 - 2xy + 2y \le 9,\ \ (x,y) \in D,\ \ D = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}.$

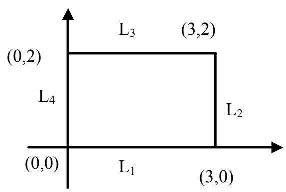
Solución. Como f es un polinomio, es continua en el rectángulo *D*, cerrado y acotado, vamos seguir a la esquema.

Primero hallamos los puntos críticos. Estos se obtienen cuando

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \\ f_x = -2x + y = 0 \end{cases}$$

de modo que el único punto crítico es (1,1), y el valor de f ahí es $f(1,1) = 1$.

Consideramos los valores de f en la frontera de *D,* que consta de los cuatro segmentos L_1, L_2, L_3, L_4, mostrados en la figura.



En L_1 tenemos $y = 0$ y $f(x,0) = x^2 \quad 0 \le x \le 3.$

Ésta es una función creciente de *x*, de modo que su mínimo valor es $f(0,0) = 0$ y su valor máximo es $f(3,0) = 9$. En L_2 tenemos $x = 3$ y $f(3,y) = 9 - 4y \quad 0 \le y \le 2$.

Ésta es una función decreciente de *y*, de modo que su valor máximo es $f(3,0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3,2) = 1$. En L_3 tenemos $y = 2$ y $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 \quad 0 \le x \le 3$.

Simplemente al observar que $f(x,2) = (x - 2)^2$, vemos que el valor mínimo de esta función es es $f(2,2) = 0$ y el valor máximo es $f(0,2) = 4$. Finalmente, en L_4 tenemos $x = 0$ y $f(0,y) = 2y \quad 0 \le y \le 2$ con valor máximo $f(0,2) = 4$ y valor mínimo $f(0,0) = 0$. Entonces, en la frontera, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

Comparamos estos valores con el valor $f(1,1) = 1$ en el punto crítico y concluimos que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3,0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0,0) = f(2,2) = 0$. Que fue necesario demostrar.

Cuando D no es acotada es necesario llevar un análisis adicional de comportamiento la función en puntos infinitos.

Ejemplo 4:

Demostrar $x \cdot y \le \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1,$ y $x \ge 0, y \ge 0$.

Introducimos

$$z(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - x \cdot y \ ,$$

puntos críticos locales están entre las resoluciones del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} , \qquad \begin{cases} x^{p-1} - y = 0 \\ y^{q-1} - x = 0 \end{cases} .$$

La expresión $y = x^{p-1}$ de primera ecuación sustituimos a segunda, obtenemos

$$x^{p-1} - x = 0, \quad x(x^{p-2} - 1) = 0, \quad x = 0, x = 1, \quad x = -1 \ .$$

Los puntos con abscisa $x = -1$ no pertenecen el dominio
$D = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$.

De $x^{p-1} - y = 0$ calculamos puntos estacionarios:

(0,0), (1,1) y los valores $z(0,0) = 0$ y $z(1,1) = 0$.

Encontramos los valores extremos de z en la frontera de D: en las semirrectas

$$L_1 : y = 0, x > 0 \ \text{ y } \ L_2 : y > 0, x = 0 .$$

En L_1 la función $z\,(x,y)$ tiene forma $z(x,0)=\dfrac{x^p}{p}$, su valor mínima logra en el punto (0,0), $z\,(0,0)=0$.

En L_2 la función $z\,(x,y)$ tiene forma $z(0,y)=\dfrac{y^p}{p}$, su valor mínima logra en el punto (0,0), $z\,(0,0)=0$.

Concluimos que el valor mínimo absoluto de $z\,(x,y)$ en D es, $z_{\min}=0$, $z(x,y)\geq 0$,

Obtenemos

$$z(x,y)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-x\cdot y\geq 0$$

que es lo que se pretendía demostrar.

Ejercicios:

1) $x>\ln(x+1)$.

2) $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$.

3) $e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2,\quad x\in D,\quad D=(0,+\infty)$.

4) $4\leq x^2+y^2-2x-6y+14$.

$$F(x) \le F(x_0)$$

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 - m_{x_0} x - b_{x_0} \le$$
$$\le a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 - m_{x_0} x_0 - b_{x_0} \quad (5.2)$$

Respecto a la nueva variable $z = x - x_0$ tenemos

$$F(z + x_0) \ge F(x_0) \quad \text{y} \quad F(z + x_0) \le F(x_0)$$

alrededor del punto $z = 0$, $|z| < \varepsilon$,

$$a_4 (z + x_0)^4 + a_3 (z + x_0)^3 + a_2 (z + x_0)^2 + a_1 (z + x_0) + a_0 -$$
$$[m(z + x_0) + b] \ge a_4 x_0^4 + a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 - [m x_0 + b] \quad (5.3)$$

$$a_4 (z + x_0)^4 + a_3 (z + x_0)^3 + a_2 (z + x_0)^2 + a_1 (z + x_0) + a_0 -$$
$$[m(z + x_0) + b] \le a_4 x_0^4 + a_3 x_0^3 + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 - [m x_0 + b] \quad (5.4)$$

Al desarrollar los binomios, pasando los términos al primer miembro y factorizando, generamos la siguiente desigualdad.

$$z[a_4 z^3 + z^2 (4 x_0 a_4 + a_3) + z(6 x_0^2 a_4 + 3 a_3 x_0 + a_2) +$$
$$4 x_0^3 a_4 + 3 a_3 x_0{}^2 + 2 a_2 x_0 + a_1 - m] \ge 0,$$

o

$$z[a_4 z^3 + z^2 (4 x_0 a_4 + a_3) + z(6 x_0^2 a_4 + 3 a_3 x_0 + a_2) +$$
$$4 x_0^3 a_4 + 3 a_3 x_0{}^2 + 2 a_2 x_0 + a_1 - m] \le 0.$$

Sea

$$w = m - [4 a_4 x_0^3 + 3 a_3 x_0^2 + 2 a_2 x_0 + a_1] \quad (5.5)$$

existen dos casos: Cuando $w \ne 0$ y $w = 0$,

Si $w = 0$, tenemos que

$$m = 4 a_4 x_0{}^3 + 3 a_3 x_0{}^2 + 2 a_2 x_0 + a_1$$

y obtenemos, las siguientes desigualdades:

$$z[a_4z^3 + z^2(4x_0a_4 + a_3) + z(6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2)] \geq 0 \qquad (5.6)$$

$$z[a_4z^3 + z^2(4x_0a_4 + a_3) + z(6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2)] \leq 0 \qquad (5.7)$$

Por demostrar que esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$

Factorizando z, obtenemos:

$$z^2[a_4z^2 + z(4x_0a_4 + a_3) + (6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2)] \geq 0 \qquad (5.8)$$

$$z^2[a_4z^2 + z(4x_0a_4 + a_3) + (6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2)] \leq 0 \qquad (5.9)$$

Demostrar que estas desigualdades se cumplen:

$z^2 \geq 0$, todo numero al cuadrado siempre es mayor e igual a cero.

Ahora verificaremos la siguiente desigualdad

$$[a_4z^2 + z(4x_0a_4 + a_3) + (6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2)] \geq 0 \qquad (5.10)$$

Como estamos alrededor $z = 0$, es raíz de la expresión anterior, esto implica que

$$(6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2) \geq 0 \quad \text{o} \quad (6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2) \leq 0$$

Si $(6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2) \geq 0$, entonces se cumple la desigualdad (5.6), alrededor de $z = 0$

Si $(6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2) \leq 0$, entonces se cumple la desigualdad (5.7), alrededor de $z = 0$

Las desigualdades (5.1) y (5.2) son equivalentes a (5.8) y (5.9) respectivamente, esto significa que se cumple la primera propiedad de la Afirmación 2.

Si $w \neq 0$, la desigualdad no se cumple cuando $z = 0$, esto es, z cambia alrededor de $z = 0$,

$$z[a_4z^3 + z^2(4x_0a_4 + a_3) + z(6x_0^2a_4 + 3a_3x_0 + a_2) +$$
$$4x_0^3a_4 + 3a_3x_0^2 + 2a_2x_0 + a_1 - m] \geq 0$$

esto es, lo que está dentro de los corchetes no cambia, por lo tanto el producto cambia y la desigualdad no se cumple.

Esto significa que se cumple la tercera propiedad de la Afirmación 2.

El punto (x_0,y_0) es punto de tangencia, por eso se cumple primera propiedad de la Afirmación 2.

Se sigue que $y = P_4(x)$, en una vecindad de $x = x_0$ pertenece a la clase C.

De Afirmación 1 y la fórmula (5.5) tenemos la pendiente de la recta tangente es:

$$m = 4a_4 x_0{}^3 + 3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1$$

Por la fórmula (2.1), obtenemos:

$$b = a_4 x_0^4 + a_3 x_0{}^3 + a_2 x_0{}^2 + a_1 x_0 + a_0 - 4a_4 x_0^4 - 3a_3 x_0{}^3 - 2a_2 x^2{}_0 - a_1 x_0$$

$$b = -3a_4 x_0^4 - 2a_3 x_0^3 - a_2 x_0^2 + a_0$$

y la solución del problema es

$$y = (4a_4 x_0^3 + 3a_3 x_0{}^2 + 2a_2 x_0 + a_1)x - 3a_4 x_0^4 - 2a_3 x_0^3 - a_2 x_0^2 + a_0 \,.$$

Ejemplo:

Consideremos la función $y = x^4$. Vamos a encontrar la ecuación de la recta tangente $y = mx + b$ que pasa por el punto (1,1) sin hacer uso de la derivada.

Solución: según nuestro análisis del caso general, la función $y = x^4$, es de clase C, en una vecindad de $x_0 = 1$.

Según la Afirmación 1, $y = mx + b$ es la recta tangente de la función $y = x^4$, si y solo si la función auxiliar $y = x^4 - [mx + b]$ tiene su punto mínimo local en $x = 1$.

Por la definición de punto extremo local en x_0 debe cumplirse la desigualdad (5.1)

$$x^4 - mx - b \geq 1^4 - m1 - b$$

alrededor de $z = x - 1$, o

$(z+1)^4 - m(z+1) \geq 1 - m$, alrededor de $z = 0$, $|z| < \varepsilon$.

Después de las operaciones tenemos

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - mz \geq 0$$

o

$$z(z^3 + 4z^2 + 6z + 4 - m) \geq 0$$

La expresión $z(z^3 + 4z^2 + 6z + 4 - m) \geq 0$ pasa de positivo a negativo alrededor de $z = 0$, cuando $m < 4$.

La expresión $z(z^3 + 4z^2 + 6z + 4 - m) \geq 0$ pasa de negativo a positivo alrededor de $z = 0$, cuando $m > 4$.

Esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$ cuando $m = 4$.

Por la fórmula (2.1), obtenemos que $b = -3$, entonces la solución del problema es:

$$y = 4x - 3$$