Ricardo Cantoral Uriza
Olda Covián Chávez
Rosa María Farfán Márquez
Javier Lezama Andalón
Avenilde Romo Vázquez

INVESTIGACIONES SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS:

UN REPORTE IBEROAMERICANO

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

DIAZ DE SANTOS

www.diazdesantos.es/ediciones (España)
www.diazdesantos.com.ar (Argentina)
www.diazdesantosmexico.com.mx (México)

ISBN: 978-84-7978-803-2
Depósito legal: M 28.899-2008

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Clame A.C.
www.clame.org.mx

Editores por Clame: Ricardo Cantoral Uriza
Olda Covián Chávez
Rosa María Farfán Márquez
Javier Lezama Andalón
Avenilde Romo Vázquez

Diseño y Formación: Rodolfo Dueñas

Colaboración de: Abraham Francisco Espinosa Pat
Martha Maldonado Rosales
Leticia Sánchez García

Agradecemos al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su apoyo a través del proyecto "Construcción social del conocimiento matemático avanzado. Estudios sobre la reproducibilidad y obsolescencia de situaciones didácticas: de la investigación a la realidad del aula" No. 41740-S

Índice

Prólogo

MATEMÁTICA EDUCATIVA, UN CAMPO DISCIPLINAR INTERNACIONAL

Editar un libro que reúna diversos puntos de vista, distintos marcos teóricos, una gran variedad de enfoques metodológicos y tradiciones de escuela (y por qué no, posturas gregarias) es, a todas luces, un reto que vale la pena tomar. Dicha diversidad es una *dicha*. La investigación en Matemática Educativa, como campo disciplinar, se ha desarrollado durante la segunda mitad del siglo XX y espera su consolidación en este aún joven siglo XXI. Por esta razón, queremos presentar en este libro, una colección de investigaciones desarrolladas desde Iberoamérica o por iberoamericanos. No pretende ser una muestra exhaustiva de los logros del quehacer en esta región del mundo, ni mucho menos pretende constituirse como un estado del arte, se trata de algo aún más modesto, se quiere decir simplemente: «esto hacemos y estos somos algunas y algunos de nosotros».

Este material es el resultado del trabajo colegiado que se realizó en el marco de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, la ya célebre Relme – 18. Nos reunimos en la bella ciudad de Tuxtla Gutiérrez, en el estado de Chiapas, México, con el apoyo desinteresado de la Universidad Autónoma del Estado de Chiapas y con la ya tradicional excelente hospitalidad y organización que da a sus iniciativas el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC).

Las *Relmes*, como son popularmente conocidas, tienen como una de sus principales características la de favorecer la confluencia de especialistas en Matemática Educativa de países latinoamericanos, europeos y estadounidenses, respetando y valorando su diversidad.

De manera que este libro es, por así decirlo, el resultado de las reflexiones que cada participante elaborara para el evento y discutiera con un conjunto de revisores a fin de mostrar al mundo los resultados de sus indagaciones de la mejor manera posible, la de aportar un dato más a la experiencia colectiva. Es así como se forjan las identidades profesionales y las disciplinas académicas.

Cuando nos ubicamos en el plano de la enseñanza de las matemáticas, y más en general en el de la educación escolarizada, una de las preguntas más frecuentes es la siguiente: ¿cómo se debe enseñar cierto contenido escolar para que el estudiante efectivamente aprenda?, o algo más básico, ¿cómo es que el o la estudiante aprenden? Ante la cuestión de qué debemos enseñar se enfrenta siempre una pregunta más fundamental… ¿es posible aprender a partir de la enseñanza?

El ejercicio de la enseñanza es tan viejo como la Humanidad misma, así que al hablar de enseñanza podríamos ubicarnos en tiempos remotos y en diversas civilizaciones. Podríamos hablar de las ideas platónicas que forjaron una escuela del pensamiento, una mirada del mundo. Las culturas fundadoras de América también desarrollaron sus propias visiones del mundo y sus sistemas de enseñanza. La cultura inca, por ejemplo, tenía un sistema en el cual se exaltaba la preocupación de que los padres enseñaran a los hijos varones a cultivar, cazar, hacer cerámica, tejer y a las mujeres a cocinar, limpiar y cuidar a los animales, así como enseñarles sobre el comportamiento social adecuado. Además de estas enseñanzas existía también una escuela conducida por los mayores de la comunidad, los ancianos a quienes llamaban "amautas" que significaba sabios o filósofos y eran los encargados de cultivar y enseñar la religión, el buen gobierno, la urbanidad, el arte militar, las bases de la cronología, las historias, la educación de los hijos, la poesía, música, filosofía y astrología.

Estas dos miradas nos permiten reconocer que el tema de la educación, y en particular de la enseñanza, ha sido, desde tiempos remotos, de la mayor importancia para el desarrollo de una sociedad, pues por un lado muestran las ideas que nos hacen ser o pertenecer a un grupo y por otro desarrollan la necesidad de pertenencia a una sociedad que precisa de conocimientos sofisticados.

Pero cuándo comienza la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, ¿cuál es el detonante del estudio de los fenómenos didácticos en el campo particular de las matemáticas? En nuestra opinión, existen diversas facetas de esta historia. Una, por ejemplo, trata del acercamiento entre miembros de disciplinas tradicionalmente disjuntas, el caso de la Matemática y la Psicología; o la Historia y las Matemáticas, en fin, la cara humana de las matemáticas. La necesidad de estudiar las relaciones entre disciplinas dio lugar a la emergencia de una "nueva especie" que permitiera mirar la creación matemática desde el punto de vista de quien la crea, el científico, el alumno, el ciudadano,… o simplemente el ser humano. Es así que en ese momento los matemáticos y los psicólogos se percataron de que hacer investigación conjunta permitiría entender la complejidad de nuevos procesos, formas de pensamiento y razonamiento de los individuos al enfrentarse con problemas de naturaleza matemática o científica. Uno de los iniciadores de esta forma de investigación fue el profesor Hans Freudenthal, quien en el año 1972, durante el II Congreso Internacional de Matemática Educativa, celebrado en Inglaterra, presentara las ideas de base para desarrollar investigaciones psicológicas en el campo de la educación en matemáticas.

Otro grupo de investigación, que a la postre desarrollara una escuela del pensamiento, fue el grupo francés en Didáctica de la Matemática. Un colectivo nacional que supo compartir a un cierto nivel, una visión de los fenómenos a estudiar, quizá no así con los métodos a emplear ni en los énfasis en las distintas dimensiones del proceso educativo. Basados en el enfoque sistémico desarrollaron teorías sobre el funcionamiento del sistema didáctico en el campo particular de las matemáticas. Guy Brousseau, Gerard Vergneaud, Régine Douady, George Glaeser fueron figuras clave en este interesante proyecto cultural: hacer de la *didáctica* una "buena palabra".

Didáctica de la Matemática, Educación Matemática y Matemática Educativa, son denominaciones que en sus diferencias expresan su propia historia, la cultura del sitio en el que nacen, pero que en el camino se encuentran una y otra vez trabajando juntas, compartiendo visiones. Una disciplina tarda un cierto tiempo en consolidarse, en un principio sus objetivos suelen limitarse a un solo aspecto: la enseñanza por ejemplo, pero que al evolucionar sus preguntas se tornan más vastas. Este libro es, como los buenos guisos, el fruto de un poco de todo…

LA MATEMÁTICA EDUCATIVA COMO DISCIPLINA EN LATINOAMÉRICA

Durante los últimos veinte años, una entusiasta comunidad de investigadores y profesores latinoamericanos ha constituido espacios para la identidad disciplinar. La Reunión Latinoamérica de Matemática Educativa se lleva a cabo anualmente, desde hace muchos años y reúne en su seno a una gran cantidad de profesores, investigadores, estudiantes, directivos, diseñadores de currículo, funcionarios del ramo, evaluadores, autores de texto, editores y líderes de opinión que representan corrientes del pensamiento contemporáneo. En el marco de esta reunión los participantes tienen la ocasión de presentar sus resultados de investigación, los logros en la implementación de sus propuestas didácticas, las experiencias docentes exitosas y las fallidas, y un cúmulo aun mayor de experiencias de vida... En esta reunión se congregan regularmente colegas de decenas de nacionalidades durante intensas jornadas con el único fin de compartir los productos de su trabajo. La Relme – 18, desarrollada en un ambiente de cooperación entre participantes y organizadores, ambiente académico y fraterno de intercambio de puntos de vista y de resultados que hicieron del evento, un acontecimiento memorable. Chiapas fue así el escenario de la conformación del libro que ahora presentamos.

En esta reunión se discutió también y con cierta fuerza, sobre la pertinencia de la investigación de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de la matemática y la incidencia de esta en la actividad docente que llevan a cabo los profesores de matemáticas en sus respectivas instituciones. Se discutieron temas de interés tales como la relevancia de una visión académica contemporánea en el encuentro de asociaciones académicas: la pertinencia de la divulgación de los libros y las revistas que muestren el estado actual de la investigación; la reunión de editores de revistas y autores de libros disciplinares; y los temas relacionados con los posgrados en matemática educativa en Latinoamérica convocando a una reunión de coordinadores de los posgrados en cada uno de los países representados.

Esta reunión fue célebre al congregar a una gran parte de la nueva generación de científicos latinoamericanos en el campo de la Matemática Educativa, jóvenes recién graduados en las mejores universidades de Europa, Estados Unidos y Latinoamérica misma. Este esfuerzo de reunir a la nueva generación de investigadores con los ya consolidados, tenía el objetivo de construir puentes de comunicación entre los miembros de una comunidad, una comunidad que mire a la Matemática Educativa como disciplina científica en proceso de consolidación.

Como resultado de esta reunión y debido a las múltiples discusiones en un marco de debate científico, se propuso la elaboración de un libro que sirva como compendio de los resultados de investigación presentados en conferencias plenarias, conferencias especiales, cátedras de los premios Simón Bolívar (premio otorgado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa) y para quienes dictaron los cursos cortos presentados. La presente publicación compendia varios de dichos trabajos y que, sin duda alguna, refleja la diversidad de los enroques a la investigación que se desarrollan en Matemática Educativa en Iberoamérica.

LA DISTRIBUCIÓN DE LA INFORMACIÓN EN EL LIBRO

El libro está estructurado en capítulos y secciones. Cuatro secciones que reflejan el tipo y naturaleza de la investigación reportada en ellas. La distribución de la información en secciones sigue parcialmente la misma estructura que fue propuesta para las actividades expuestas en la XIII Acta Latinoamericana de Matemática Educativa y que fuera excelentemente editada por los colegas del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional en México: Javier Lezama, Gabriel Molina y Mario Sánchez.

El apartado primero, denominado "Análisis del Currículum", presenta nueve artículos que abordan diferentes temas de investigación en Matemática Educativa relativos al análisis especial de los temas que se abordan en la currícula escolar. Por ejemplo, en el artículo que lleva por nombre "Significados de la probabilidad en la Enseñanza Secundaria", se parte de *un modelo teórico sobre el significado de los objetos matemáticos en que se consideran seis elementos diferenciados y se distingue entre el significado dado al objeto en una cierta institución de enseñanza y el personal adquirido por un alumno dentro de la institución. Se utilizan estas ideas para analizar los distintos significados históricos de la probabilidad y cómo han sido tenidos en cuenta en la enseñanza secundaria. Finalizamos con algunas recomendaciones para mejorar la enseñanza de la probabilidad*. Este trabajo permite explorar tanto el sistema como las variedades del pensamiento de la escuela secundaria en España.

Otro tema de investigación reflejado en este material es el de "La evaluación del aprendizaje en la Educación Matemática" el cual presenta *una metodología para diseñar el sistema de evaluación en las matemáticas, considerando la evaluación como función del sistema de dirección del proceso de enseñanza y se propone una metodología que se ejemplifica con el Cálculo Integral, la cual se llevó a la práctica en la Universidad de Camagüey durante dos cursos escolares. Se conceptualiza la evaluación del aprendizaje y se ofrecen las herramientas didácticas que se deben* *tener en cuenta para la dirección de la evaluación, basado en los principios, regularidades metodológicas y las principales premisas teóricas que deben tenerse en cuenta*.

Lo anterior se presenta, entre otros temas, como: Formación de Profesores, la Teoría Matemática, Propuestas Didácticas, abordando conceptos matemáticos para el Cálculo Infinitesimal, Aritmética y Álgebra a través de diversos niveles de enseñanza: secundaria, bachillerato y profesional o universitario.

El segundo bloque de este libro lleva por título "Consideraciones de aspecto socioepistemológico". En esta sección se presentan parcialmente los resultados de investigación desarrollados en torno a la Teoría Socioepistemológica en Matemática Educativa. Esta teoría ha estado en constante desarrollo teórico en los últimos quince años y ha logrado consolidar una comunidad amplia y trabajadora. Una de sus principales hipótesis es la de señalar como factor decisivo en la investigación en Matemática Educativa, al estudio de la construcción social de conocimiento matemático a través del examen de la evidencia empírica en el análisis de las prácticas de los seres humanos. Tal como se reporta en el artículo "Socioepistemología de la Contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja", en donde el análisis de la dimensión social juega un papel fundamental al momento de entender el paso del conocimiento al saber, es decir, el paso del individuo a su cultura.

Otra característica fundamental del enfoque socioepistemológico es que no centra su atención primordialmente en el análisis de objetos matemáticos, sino que se enfoca principalmente en las prácticas sociales que posibilitan la emergencia del conocimiento; un ejemplo de este tipo de estudios lo podemos ver reflejado en el capítulo titulado "Estudio socioepistemológico de lo periódico".

Este apartado se compone de once capítulos, entre los que destaca la diversidad de líneas de investigación, el uso de las gráficas, pensamiento y lenguaje variacional, el estudio del fenómeno de la reproducibilidad desde la perspectiva socioepistemológica, la convención matemática y la ingeniería didáctica.

El tercer bloque que trata este compendio se llama "Diversos Encuadres Teóricos" y, como su nombre indica, refleja la diversidad de teorías que se encargan del estudio de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En este apartado encontramos doce artículos, entre los que podemos mencionar, por ejemplo, un estudio que busca en la historia de las matemáticas la identificación de los elementos precursores de ciertos conceptos, tal es el caso de los números naturales, y estudia si es posible encontrar o identificar elementos de esta relación en el aprendizaje de las fracciones: ello quedó de manifiesto en el artículo "El papel de la noción de razón en la construcción de las fracciones en la escuela primaria".

También podemos encontrar investigaciones de corte más bien teórico, como aquella que nos reporta la aproximación de la semiótica cultural, al plantear el problema de la cognición humana desde un punto de vista antropológico: "Semiótica Cultural y Cognición".

El último bloque lleva por nombre Uso de la Tecnología, en esta sección podemos encontrar tres artículos que presentan los resultados de investigación con respecto a este tema. Un ejemplo que se presenta es el artículo titulado “Sobre la enseñanza de Límites” y en este se *usa una selección de ejemplos para ilustrar cómo las capacidades numéricas y gráficas de las calculadoras gráficas, permiten realzar la enseñanza y el aprendizaje de un concepto central en la enseñanza del Cálculo: el límite de una función. En adición a la capacidad de ver inmediatamente la gráfica de una función, la variedad de tipos de datos disponibles en estas calculadoras facilita el uso de distintos enfoques numéricos*.

De esta forma, esta obra se posiciona como un recorrido de diversidad, un espacio de análisis comparativo y de profundización teórica elaborado desde una particular región del mundo. Esperamos que el lector encuentre en sus páginas ejemplos para la acción, elementos teóricos para debatir en seminario de licenciatura y posgrado, datos para la interpretación de lo cotidiano en aula cuando una alumna quiere aprender matemáticas. Pero sobre todo, que encuentre en sus páginas una invitación al movimiento. Un llamado a la acción para buscar, mediante la investigación científica, una forma de construir un mundo más justo y con un mejor futuro.

RICARDO CANTORAL Y OLDA COVIÁN
Invierno de 2006
Zacatenco, Ciudad de México

Parte I

Análisis
del Currículum

1

UN CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL PARA BACHILLERATO

José Ismael Arcos Quezada*

Hay dos cuestiones que son objeto de revisión continua en cuanto a la educación matemática del bachiller: la primera es si el Cálculo Diferencial e Integral debe ser un curso básico, es decir, obligatorio para todos los estudiantes, o si sólo debe ofrecerse a aquellos que aspiren a estudiar alguna carrera técnica o científica; la segunda es la referente a los contenidos y la metodología didáctica apropiada para ese nivel.

En este documento se elabora una propuesta sobre los contenidos del curso, y más precisamente sobre la presentación de los mismos. Se podrán observar diferencias notables respecto de lo que podemos encontrar en los textos de la materia disponibles en el mercado, lo que implica, por lo tanto, una revisión acerca de los materiales, el uso de la tecnología y la metodología didáctica para instrumentarse en las aulas; sin embargo, esa revisión no será atendida en este trabajo.

1.1. EL CÁLCULO INFINITESIMAL

Puede decirse que lo que aquí se describe es una versión moderna del cálculo infinitesimal leibniziano y podemos señalar las siguientes razones principales para su propuesta:

a) El cálculo infinitesimal leibniziano (basado en el uso de las cantidades pequeñas o infinitesimales) fue utilizado con un enorme éxito en la modelación de fenómenos físicos y en el planteamiento y solución de problemas geométricos durante al menos 100 años. En los textos utilizados para la enseñanza del Cálculo esta

* Arcos, J. (2007). Un curso de Cálculo Infinitesimal para Bachillerato. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 3-24). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C-Díaz de Santos.

presentación sobrevivió hasta principios del siglo XX y en la mayoría de los textos de ciencias básicas y de la ingeniería sigue siendo utilizada actualmente.

b) Entre los profesionales de la matemática, el Cálculo infinitesimal fue desechado desde mediados del siglo XIX, debido a supuestas deficiencias en sus fundamentos. En la enseñanza (del Cálculo) se abandonó la presentación leibniziana, siendo gradualmente sustituida por la versión de Cauchy-Weierstrass, sin mayor atención al aspecto didáctico. Actualmente la mayor parte de los profesores de Cálculo reconoce que la presentación basada en el concepto (riguroso) de límite resulta poco accesible para el común de los estudiantes.

c) A partir de los trabajos de Robinson, a mediados del siglo XX, podemos decir que no hay ninguna razón para seguir insistiendo en una falta de fundamentación lógica para el uso de los infinitesimales y, por lo tanto, en que el Cálculo infinitesimalista es rigurosamente defectuoso. Lo que se observó en las aulas, principalmente a lo largo de la segunda mitad del siglo XX, nos deja como lección que en la enseñanza resulta más conveniente una presentación de una ciencia que atienda los intereses y capacidades de (la mayoría de) los estudiantes y no las características que, en cuanto rigor lógico se refiere, ha de tener esa ciencia, según los profesionales de la misma.

d) Las tendencias existentes en cuanto a metodologías didácticas se refiere, así como al disponibilidad de modernas tecnologías, nos permite construir una propuesta del Cálculo que recupere las ideas básicas de aquel de los siglos XVII y XVIII y que, al mismo tiempo, resulte acorde con la presente época.

1.2. LOS CONCEPTOS PREVIOS

Si se opta por una presentación infinitesimalista del Cálculo, en lugar de aquella basada en el concepto de límite, los conceptos requeridos para abordar la temática del curso son definitivamente distintos; ya que en este caso no resulta aconsejable abundar en torno al conjunto de los números reales, a las funciones, ni mucho menos al concepto de límite. En su lugar hay que introducir las ideas básicas respecto de la *geometría y aritmética infinitesimalistas*.

GEOMETRÍA INFINITESIMALISTA

La idea geométrica en la que se habrá de insistir, desde el comienzo del curso, es aquella referente a la visión de las *curvas como poligonales con una infinidad de lados, cada uno de ellos infinitamente pequeño*. Para ello resulta sumamente útil el recurso de la tecnología para la visualización. Así, si se dibujan mediante computadora polígonos regulares inscritos en una circunferencia, con un número grande de lados, estos se confundirán con la circunferencia a medida que el número de lados sea mayor. En la Figura 1.1 se muestran los polígonos (regulares) inscritos, de 4, 8, 16 y 32 lados, pudiéndose observar que, a la vista ya no resulta distinguible con la circunferencia, el polígono de apenas 32 lados.

Tangentes, arcos y cuerdas. Una idea semejante a la anterior es la de la coincidencia de la cuerda y el arco con la tangente, en una vecindad infinitamente pequeña del punto de tangencia. Esta situación fue observada por Newton, quien expuso en sus *Principios* la teoría de las *primeras y últimas razones*.

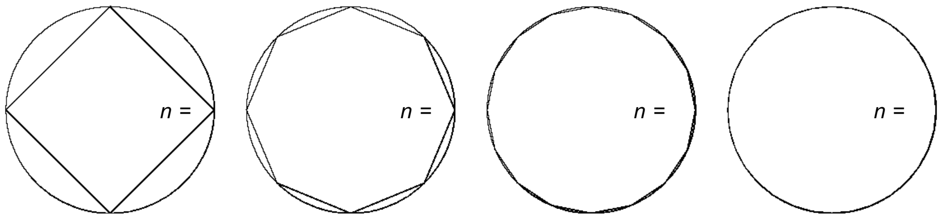

Figura 1.1. Polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

De acuerdo con tal teoría, puede decirse que, si se toma un punto P de una curva, y enseguida se considera otro punto Q, también sobre la curva, acercándose a P, ocurrirá que, cuando la distancia entre los puntos sea infinitamente pequeña, la cuerda y el arco definidos por P y Q, se confundirán con la tangente a la curva en P (esta tangente permanecerá fija, ya que sólo depende de la curva y el punto fijo P).

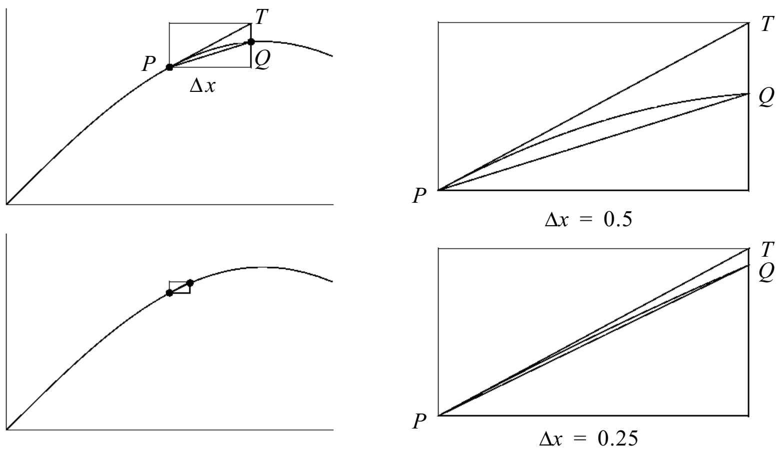

Figura 1.2. Cuerda, arco y tangente definidos por un incremento de la variable.

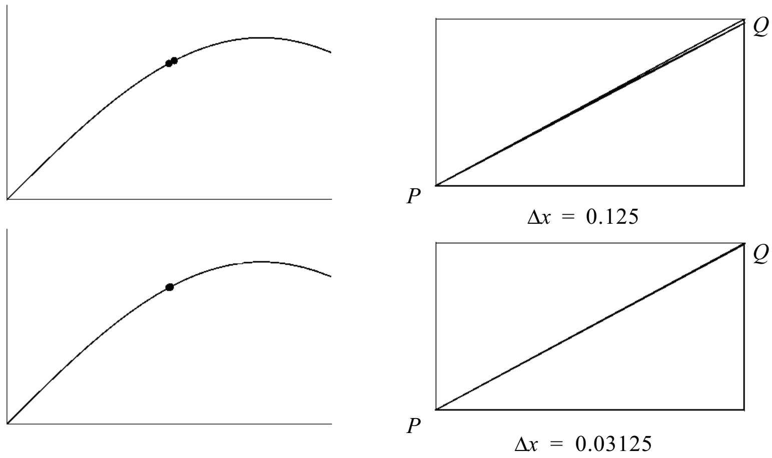

Figura 1.2. Cuerda, arco y tangente definidos por un incremento de la variable. *(continuación)*

En este caso la visualización mediante computadora vuelve a ser un recurso valioso. Así, en la Figura 1.2 (izquierda) observamos cuatro copias de la parte de la gráfica de y = sen x, correspondiente al intervalo [0, 2]. El punto fijo es P = (1, sen 1), y la diferencia entre las abscisas de P y Q es Δx, de manera que las coordenadas de Q son (1 + Δx, sen (1 + Δx)).

Las figuras corresponden, respectivamente, a $\Delta x = 0.5$, $\Delta x = 0.25$, $\Delta x = 0.125$ y $\Delta x = 0.03125$, mostrándose a la derecha y para cada caso, un acercamiento de la parte de la curva correspondiente al intervalo [1, 1 + Δx], así como la cuerda PQ y la parte PT de la recta tangente a la curva en P.

Podemos observar que, conforme Q se aproxima a P, queda aún más próximo de T, de manera que la cuerda y el arco PQ terminan por confundirse con la tangente PT, cuando Δx es infinitamente pequeño.

O bien, en palabras de Newton: “la última razón del arco, la cuerda y la tangente entre sí es la razón de igualdad”.

Cabe observar que, visualmente, la confusión entre arco cuerda y tangente ocurre cuando Δx es finito, pero suficientemente pequeño, como se observa en la Figura 1.2.

SENO Y COSENO DE UN ÁNGULO INFINITESIMAL

Una proposición básica de la geometría infinitesimalista, cuyo uso facilita la obtención de muchos de los resultados del cálculo diferencial, es aquella que nos indica los términos principales del seno y el coseno de un ángulo infinitesimal.

Para obtener ese resultado, considérese el sector circular OAB (Figura 1.3, izquierda), correspondiente a un ángulo central w, de una circunferencia de radio $a = OA$. El arco AB y la cuerda AB, están dadas por:

$$\text{arco } AB = aw \qquad \text{y} \qquad \overline{AB} = 2a \operatorname{sen}(w/2)$$

Cuando w es pequeño (como ocurre en la figura 1.3., derecha), el arco y la cuerda se parecen, pero si w es infinitesimal, entonces son iguales, es decir:

$$aw = 2a \text{ sen } (w/2), \qquad (w \text{ infinitesimal})$$

$$w = 2 \text{ sen } (w/2), \qquad \frac{w}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)$$

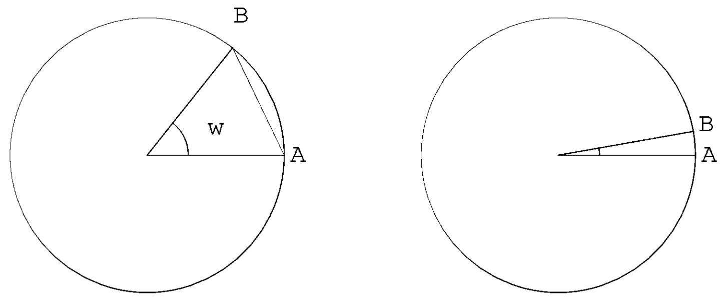

Figura 1.3. Arco y cuerda en un sector circular.

Es decir, si α es infinitesimal, entonces: sen $\alpha = \alpha$.

Además, $\cos a = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a} = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1} = 1$.

ARITMÉTICA INFINITESIMALISTA

En cuanto a las reglas básicas para las operaciones aritméticas con cantidades infinitamente pequeñas (o grandes), éstas pueden introducirse con el recurso de la calculadora. Por ejemplo, para comparar entre sí dos cantidades, una de las cuales es muy grande en comparación con la otra, puede plantarse la pregunta: ¿cuál es la variación de la masa de la Tierra si cae sobre ella un meteorito de 500 kg de masa?

El estudiante tendrá que considerar que la masa de la Tierra es, aproximadamente, 5.98×10^{24} kg, así que al aumentar la masa del meteorito obtendrá como resultado, en su calculadora: $M_{Tm} = 5.98 \times 10^{24} + 500 = 5.98 \times 10^{24}$.

Ejercicios como este permiten inferir reglas como: “si N es una cantidad infinitamente grande y a un número real, entonces: $a + N = N$”, o bien, “si α es una cantidad infinitamente pequeña, entonces $a + \alpha = a$”.

También mediante ejercicios aritméticos con la calculadora se puede inferir una propiedad de los polinomios que resulta de mucha utilidad. Para ello se puede partir de un caso particular, por ejemplo, pueden considerarse dos variables x y w, relacionadas mediante la ecuación $w = \sqrt{4x^2 + 7x + 9}$ y observar qué pasa con el valor de w cuando x toma valores muy pequeños o muy grandes.

En la Tabla 1.1. se muestran los valores de w que da una calculadora (con 10 cifras) cuando x toma sucesivamente, los valores 10^{-1}, 10^{-2}, …, 10^{-12}, es decir, las primeras doce potencias enteras negativas de 10.

Tabla 1.1. Comportamiento de un polinomio para valores pequeños de la variable.

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
$\sqrt{4x^2 + 7x + 9}$	3.1208997307	3.011710477	3.001167106	3.000116671
x	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}
$\sqrt{4x^2 + 7x + 9}$	3.000011667	3.000001167	3.000000117	3.000000012
x	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}	10^{-12}
$\sqrt{4x^2 + 7x + 9}$	3.000000001	3.000000000	3.000000000	3.000000000

En dicha tabla se puede observar que, para valores de la variable suficientemente pequeños, los términos $4x^2$ y $7x$ resultan despreciables, en comparación con 9, de manera que, para valores suficientemente pequeños de x, $w = \sqrt{4x^2 + 7x + 9} \cong \sqrt{9} = 3$.

Por otra parte, en la Tabla 1.2 se muestran los valores de w que da una calculadora (con 10 cifras) cuando x toma sucesivamente, los valores $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, …, 10^{-12}, es decir, las primeras doce potencias enteras de 10.

Tabla 1.2. Comportamiento de un polinomio para valores grandes de la variable.

x	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{4}
$\sqrt{4x^2 + 7x + 9}$	21.88606863	201.7647145	2001.751483	20001.75015
x	10^{5}	10^{6}	10^{7}	10^{8}
$\sqrt{4x^2 + 7x + 9}$	200001.7500	2000001.750	20000001.75	200000001.8
x	10^{9}	10^{10}	10^{11}	10^{12}
$\sqrt{4x^2 + 7x + 9}$	2000000002	2×10^{10}	2×10^{11}	2×10^{12}

Ahora podemos ver que, para valores grandes de la variable, son los términos de menor grado, es decir, $7x$ y 9, los que resultan despreciables en comparación con el término de mayor grado, en este caso, $4x^2$, de manera que, para valores suficientemente grandes de x, $w = \sqrt{4x^2 + 7x + 9} \cong \sqrt{4x^2} = 2x$.

Así pues, este ejercicio nos induce a afirmar que: "un polinomio se comporta como su término de mayor grado cuando la variable toma valores grandes y como el término independiente (o de menor grado) cuando la variable toma valores pequeños".

Notación posicional con base infinitamente grande

Un recurso muy útil lo es el escribir cualquier cantidad como una serie de potencias de una cantidad infinitamente grande N, de la misma manera que un número real se escribe como una serie de potencias de 10, es decir, haciendo uso de la notación posicional. Así pues, podemos indicar que una cantidad cualquiera w se puede expresar en la forma:

$$w = \sum_{j=0}^{n} b_j \, (N_j) + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, (N^{-k})$$

En la cual, cada una de las constantes, b_j y d_k, son números reales. Generalmente resulta conveniente separar el término correspondiente al exponente cero,[1] que es, por lo tanto, una cantidad finita, o número real, escribiendo entonces:

$$w = \sum_{j=1}^{n} c_j \, (N^j) + c_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_j \, (N^{-k})$$

Observemos que la primera suma es una cantidad infinitamente grande, y la segunda es infinitesimal, mientras que el término de en medio, c_0, es una cantidad finita.

Término principal y tamaño del residuo

Ahora bien, si se considera que, siendo p/q infinitamente grande, se dirá que p es infinitamente grande respecto de q, o que q es infinitamente pequeña respecto de p, tendremos entonces que, siendo $n > m$, se tendrá que $N^n/N^m = N^{n-m}$ es infinitamente grande, y N^n será infinitamente grande respecto de N^m.

Así pues, si se escribe una cantidad dada en la forma posicional antes descrita, respecto de una cantidad infinitamente grande N, se tendrá que el primero de los términos (por la izquierda) será infinitamente grande respecto de todos los demás, razón por la cual

[1] Nótese que, para el nuevo conjunto, se suponen válidas aquellas propiedades de los exponentes que se utilizan en el conjunto de los números reales. En este caso tenemos que $N^0 = 1$.

será llamado *término principal*, y la cantidad podrá expresarse únicamente por medio de dicho término. El resto de los términos será llamado *residuo*.

Por ejemplo, si $p = 2N^2 + N - 4 + 5N^{-1} + 8N^{-2}$, entonces se puede decir, simplemente, que $p = 2N^2 + o(N)$, en donde $o(N)$ indica que el residuo es del orden de N, ya que el resto de los términos son despreciables (infinitamente pequeños) respecto de N.

Por otra parte, en ocasiones conviene retener más que el término principal, particularmente cuando se trata de separar la parte infinitesimal, por ejemplo, si $p = 2N^2 + N - 4 + 5N^{-1} + 8N^{-2}$, entonces se puede decir que $p = 2N^2 + N - 4 +$ infinitesimal, o bien, $p = 2N^2 + N - 4 + o(N^{-1})$.

SERIE BINOMIAL

Otro concepto que puede presentarse al principio, y que resulta muy útil más adelante, es el de la *serie binomial*, por supuesto, no de la manera rigurosa. De lo que se trata es de presentar algunas ideas acerca de la convergencia de una serie de potencias, de manera que el estudiante reconozca que el valor de un polinomio se acerca al de la función conforme aumenta el número de términos o conforme el valor de la variable es más pequeño.

Para la presentación de este concepto se puede partir de las potencias de un binomio cuando el exponente es natural e inducir la expresión general correspondiente:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \cdots$$

Después de esto se puede recurrir a la factorización para obtener la serie en su forma más comúnmente utilizada:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Nuevamente, se puede recurrir a la calculadora, con casos específicos, para indicar, en este caso, que esta serie resulta válida (es decir, es convergente) sólo si $|x| < 1$.

DISCONTINUIDADES Y ASÍNTOTAS

Una de las deficiencias de la presentación tradicional del Cálculo, es que no favorece la visualización. Por ejemplo, cuando se tratan los límites cuando la variable tiende a infinito, sólo se consideran dos tipos de respuesta; que el límite sea una constante, que corresponde a una asíntota horizontal, o que el límite sea infinito, en cuyo caso tal respuesta no ofrece gran ayuda para la graficación de la función.

Con la presentación infinitesimalista, en cambio, es más accesible identificar un comportamiento asintótico de la función, particularmente si se trata de una función racional. Para ello se da la siguiente definición: la gráfica de una función g es una *asíntota* de la gráfica de otra función f (y viceversa), si para N infinitamente grande, $f(N) - g(N)$ es infinitesimal.

Así, por ejemplo, para la función definida mediante $y = G(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$, si se aplica el algoritmo de la división de polinomios, se obtiene que el cociente es $x^2 + x + 1$ y el residuo es 1, por lo tanto:

$$G(x) = \frac{x^3}{x-1} = x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Cuando $x = N$ (infinitamente grande), se tendrá: $G(x) = \dfrac{N^3}{N-1} = N^2 + N + 1 + \dfrac{1}{N-1}$.

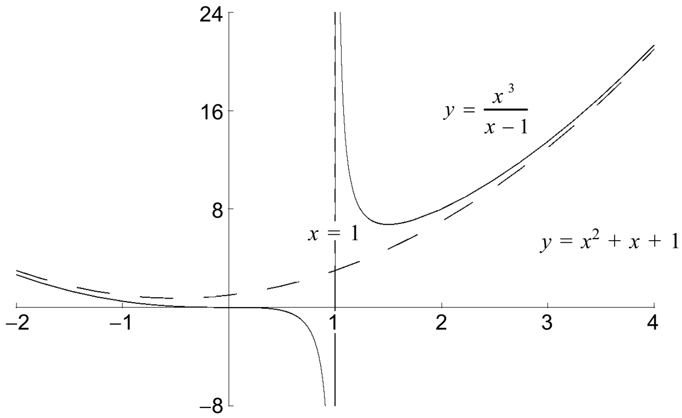

Figura 1.4. Función racional con asíntota parabólica.

Observando que el último término de esta expresión es infinitesimal, concluimos que una asíntota de la gráfica de G es la parábola $y = x^2 + x + 1$.

Complementando esta información con la que se obtiene usualmente, y haciendo una tabulación para unos cuantos valores de la variable, podemos trazar la gráfica de la función G, la que se muestra en la Figura 1.4.

LÍMITE

Es claro que si se opta por una presentación infinitesimalista del Cálculo, la definición rigurosa de límite ya no resulta necesaria, sin embargo, si se desea dar una definición que resulte útil para la determinación de límite, puede darse la siguiente:

Decimos que el límite de una función f en a es L, si para α infinitesimal se tiene que:

$f(a + \alpha) = L + \beta$, con β infinitesimal.

Ahora bien, sólo resultará razonable la aplicación de esta definición cuando se presente la forma indeterminada 0/0.

Por ejemplo, si f es la función definida por $f(x) = \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}$, observamos inmediatamente que para $x = 1$ el denominador y el numerador se anula, por lo que se tiene la forma indeterminada. Conviene entonces preguntarse por el límite de la función cuando $x \to 1$.

Tenemos entonces, de acuerdo con la definición dada, que:

$$f(1+\alpha)=\frac{1-(1+\alpha)^{1/3}}{1-(1+\alpha)^{1/4}}=\frac{1-\left(1+\frac{1}{3}\alpha+o(\alpha^2)\right)}{1-\left(1+\frac{1}{4}\alpha+o(\alpha^2)\right)}=\frac{\frac{1}{3}\alpha+o(\alpha^2)}{\frac{1}{4}\alpha+o(\alpha^2)}=\frac{\frac{1}{3}\alpha}{\frac{1}{4}\alpha}$$

$$f(1+\alpha)=\frac{1}{4}+\text{infinitesimal}$$

Por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}=\frac{4}{3}$

Como segundo ejemplo consideremos la función definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-(1+\frac{1}{3}x)}{x^2}$,

en donde observemos, nuevamente, que se presenta la forma indeterminada 0/0, para $x = 0$. Interesa entonces calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$, por lo que habrá que calcular $f(0 + \alpha) = f(\alpha)$. Ahora bien, tenemos que:

$$\sqrt[3]{1+\alpha} = (1+\alpha)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}\alpha+\frac{(1/3)(-2/3)}{2}\alpha^2 + o(\alpha^3)$$

$$= 1+\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2 + o(\alpha^3),$$