MATEMÁTICA EDUCATIVA

ALGUNOS ASPECTOS DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA Y LA VISUALIZACIÓN EN EL AULA

Editado por

CRISÓLOGO DOLORES
Universidad Autónoma de Guerrero (UAG)

GUSTAVO MARTÍNEZ
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME)

ROSA MARÍA FARFÁN
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del IPN

CAROLINA CARRILLO
Universidad Autónoma de Guerrero (UAG)

IVÁN LÓPEZ
Universidad Autónoma de Guerrero (UAG)

CATALINA NAVARRO
Universidad Autónoma de Guerrero (UAG)

DIAZ DE SANTOS
Madrid - Buenos Aires - México

Diseño de portada: José Iván López Flores
Motivo de cubierta elaborada en papel amate por artesano guerrerense

Ediciones Díaz de Santos

E-mail: ediciones@diazdesantos.es
www.diazdesantos.es/ediciones (España)
www.diazdesantosmexico.com (México)

ISBN: 84-7978-786-4
Depósito legal: M. 45.494-2006

Fotocomposición: Estefanía Grimoldi
Impresión: Fernández Ciudad
Encuadernación: Rústica - Hilo

Índice

PARTE II
VISUALIZACIÓN Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

PARTE III
ASPECTOS DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL Y EL ÁLGEBRA LINEAL

Agradecimientos

La concepción inicial de esta obra emergió en el seno de la comunidad de investigadores agrupados en torno al Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y se refiere principalmente a una visión novedosa que atiende los fenómenos inmersos en la transmisión y asimilación de conocimiento: la Socioepistemología. La tarea específica de publicar esta obra constituye uno de los primeros esfuerzos del Cuerpo Académico de Matemática Educativa de la UAG por conjuntar y estimular el trabajo colectivo de sus miembros y de los colegas que en el país estudian esos fenómenos. A los colegas que se sumaron a esta tarea de publicación manifestamos nuestro agradecimiento.

Especial reconocimiento manifestamos a los colegas José Iván López Flores y Carolina Carrillo García, quienes hicieron una revisión y corrección acuciosa de los escritos para la preparación de la versión final de esta obra. Su colaboración en la edición fue decisiva.

Esta publicación se enmarca en los compromisos contraídos en el proyecto FOMIX Gobierno del Estado de Guerrero-CONACYT Registro GUE-2002-C01-7626.

CRISÓLOGO DOLORES FLORES
Chipancingo, Guerrero
Febrero 2006

Autores

Editores

Crisólogo Dolores es profesor de tiempo completo del posgrado de Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores desde 1996 y miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias desde 2003. Trabaja en la línea de investigación relativa a los estudios sobre el pensamiento y lenguaje variacional. Es maestro en la especialidad de Físico-Química por la UAG desde 1985. Es licenciado en Matemática Educativa y maestro en Ciencias en la misma especialidad por la UAG desde 1989, recibió el doctorado en 1996 en el Instituto Superior Pedagógico "Enrique José Varona" de La Habana, Cuba. Ha hecho dos estancias de investigación, en el periodo 1996-1997, al lado del doctor Ricardo A. Cantoral Uriza, y en el periodo 2001-2002 en el Centro de Investigación en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada (CICATA) del IPN en el postgrado de Matemática Educativa. Ha publicado más de 15 artículos con arbitraje, los cuales tienen más de 50 citas.

E-mail: cdolores@cimateuagro.org; cdolores@prodigynet.mx

* * *

Gustavo Martínez labora como profesor de tiempo completo en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG), realizando labores de docencia e investigación en el Centro de Investigación en Matemática Educativa de dicha facultad, en donde desempeña el cargo de presidente de la Academia de Matemática Educativa. Realizó su maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. Obtuvo su doctorado en Ciencias en Matemática Educativa en el Programa de Matemática Educativa del CICATA, IPN. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores y dirige un proyecto financiado por CONACYT. Preside el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), es miembro del comité de redacción de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*. Ha dirigido cuatro tesis de maestría y dos de licenciatura. Ha publicado seis artículos de investigación, es coautor de un libro, ha escrito un capítulo para libro y colaborado en la escritura de otro.

E-mail: gmartinez@cimateuagro.org
Página personal: http://cimate.uagro.mx/martinez_sierra/

* * *

Rosa María Farfán es investigadora titular "C" de tiempo completo, en el Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, lugar en el que realizó sus estudios de maestría y doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa; posteriormente hizo una estancia posdoctoral en epistemología y didáctica de las Matemáticas, en la Universidad de París VII. Ha colaborado como investigadora invitada en las universidades de París (1993-1994) y Bolonia (1998). Su línea de investigación se ubica en el diseño y estudio de la Ingeniería Didáctica para la Matemática avanzada en la escuela contemporánea, particularmente respecto de la convergencia y del lenguaje gráfico en precálculo. Ha dirigido 23 tesis de maestría, 4 de doctorado y 10 de especialidad. Es autora de 8 libros, 9 capítulos de libro y diversos artículos en publicaciones científicas internacionales. Participa en varios grupos editoriales y comités científicos y educativos, así como en la organización de diversas reuniones académicas nacionales e internacionales. Es actual miembro y presidente inmediato anterior del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, miembro de la Academia Mexicana de Ciencias e Investigador Nacional Nivel II del Sistema Nacional de Investigadores.

E-mail: rfarfan@cinvestav.mx

* * *

Carolina Carrillo es profesora investigadora del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Es Licenciada en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán, tiene el grado de Maestra en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, en México. Ha participado como organizadora, ponente y asistente en diversos eventos nacionales e internacionales de la disciplina. Es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

E-mail: ccarrillo@cimateuagro.org

Iván López es profesor investigador del Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero. Es Licenciado en Enseñanza de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Yucatán, tiene el grado de Maestro en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, en México. Ha participado como organizador, ponente y asistente en diversos eventos nacionales e internacionales de la disciplina. Es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

E-mail: jilopez@cimateuagro.org
Página electrónica: www.cimateuagro.org/ivanlopez/index.php

* * *

Catalina Navarro es profesora investigadora en la unidad académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Realizó sus estudios de maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Cinvestav del IPN, México. Ha participado como ponente en diversas reuniones académicas nacionales e internacionales. Es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

E-mail: cnavarro@cimateuagro.org

Otros autores

Guadalupe Cabañas es investigadora del Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) de la unidad académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Participa en las líneas de investigación: la solución de problemas en la enseñanza de la Matemática; construcción social del conocimiento matemático; y desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Ha publicado un libro, capítulos de libro, artículos científicos y ha participado en congresos como ponente y dictando cursos. Ha dirigido proyectos de desarrollo y actualmente participa en los proyectos: "Programa de Capacitación y Actualización para profesores de Matemáticas de Educación Media Superior en Guerrero" y "Consolidación del Cuerpo Académico de Matemática Educativa de la Facultad de Matemáticas de la UAG". Actualmente, se encuentra realizando estudios de doctorado en el área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, con la investigación: "Un estudio sobre la reproducibilidad de situaciones didácticas. El papel de la noción de conservación del área en la explicación escolar del concepto de integral".

E-mail: gcabanas@cinvestav.mx

Ricardo Cantoral es investigador titular "C" de tiempo completo, en el área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, lugar en el que realizó sus estudios de maestría y doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa; posteriormente hizo una estancia posdoctoral en la Universidad de París VII. Su línea de investigación se ubica en temas como: socioepistemología de las Matemáticas, estudios sobre pensamiento y lenguaje variacional, formación y actualización de profesores, educación a distancia. Ha dirigido 9 tesis de doctorado, 44 de maestría y 22 de especialidad. Es autor de 17 libros, 18 capítulos de libro y diversos artículos en publicaciones científicas internacionales. Participa en varios grupos editoriales y comités científicos y educativos, así como en la organización de diversas reuniones académicas nacionales e internacionales. Es actual miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, miembro del comité Recherches en Didactique des Mathématiques, miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias e Investigador Nacional Nivel II del Sistema Nacional de Investigadores.

E-mail: rcantor@cinvestav.mx; ricardo_cantoral@cimateuagro.org
Página personal: http://cimate.uagro.mx/cantoral/

* * *

Germán Muñoz estudió su doctorado en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. Participó en el diseño e implementación de la maestría en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Chiapas (UNACH) en 2001 y actualmente la coordina. Galardonado con el premio Simón Bolívar en 1999 otorgado por el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Miembro del Sistema Nacional de Investigadores y del CLAME desde 2001. Sus investigaciones se interesan por la dialéctica entre lo conceptual y lo algorítmico relativa a prácticas sociales asociadas al Cálculo integral. Coautor del libro La integral y la noción de variación publicado por Iberoamérica. Implementó un diplomado permanente para Chiapas. Invitado por CLAME para evaluar tesis de la versión 2005 del premio latinoamericano Simón Bolívar. Miembro del Consejo Consultivo de Investigación y Posgrado de la UNACH y de la Comisión de Fortalecimiento Científico del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Chiapas.

E-mail: yaltzil@unach.mx

Gabriela Buendía estudió la maestría y el doctorado en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Cinvestav del IPN. Actualmente se desempeña como docente de tiempo completo en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chiapas. Es miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME), así como miembro del Sistema Nacional de Investigadores. En 2005 se hizo acreedora del premio Simón Bolívar, que otorga el CLAME, a la mejor tesis de doctorado en Matemática Educativa. Su línea de investigación se refiere a la construcción social del conocimiento matemático, bajo la cual ha publicado artículos de investigación en la Educational Studies in Matematics y en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.

E-mail: buendiag@unach.mx

* * *

Miguel Díaz es originario de Unión de Tula, Jalisco, México. Licenciado en Ingeniería Química por la Universidad de Guadalajara; maestro en Ciencias, área Matemática Educativa, por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Actualmente se desempeña como profesor de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAG, de la cual ha sido director, e investigador del Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE-UAGRO); es miembro activo del cuerpo académico de Matemática Educativa, y es coordinador de la línea de generación y aplicación del conocimiento denominada Visualización matemática y Geometría dinámica.

E-mail: mdiaz@cimateuagro.org

* * *

Santiago Ramiro Velázquez es doctor en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa, docente-investigador de la UAGRO y del Centro de Investigación y Desarrollo Educativo de Acapulco. Integrante del cuerpo académico de Matemática Educativa de la maestría en Ciencias, área Matemática Educativa, posgrado incorporado al programa integral de fomento al posgrado SEP-CONACYT. Miembro del Colegio de Doctores de la Facultad de Matemáticas. Responsable técnico del proyecto de investigación denominado Programa de Capacitación y Actualización para Profesores de Matemáticas de Nivel Medio Superior en Guerrero, GUE-2002-C01-4725. Su línea de investigación es el desarrollo de habilidades matemáticas y la formación de profesores. En colaboración con otros colegas, ha publicado, entre otros, el libro *El desarrollo de habilidades matemáticas en situación escolar* (2001), del Grupo Editorial Iberoamérica; y *El proceso de estudiar matemáticas en el nivel medio superior. Una experiencia de capacitación de profesores* (2005), de la editorial Santillana.

E-mail: sramiro@prodigy.net.mx

* * *

Eugenia Apreza es licenciada en Contaduría Pública, cursada en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) en el año de 1990 a 1995. Cursó la nivelación a licenciada en Matemática Educativa en la UAG, generación 2000-2002. Actualmente trabaja en su titulación de la maestría en Matemática Educativa cursada en la Facultad de Matemáticas de la UAG, generación 2003-2005.

* * *

Diana Rosario Lluck es jefa del departamento de Servicios Escolares y docente en el CBTis 14 de Acapulco, Guerrero. Ha laborado, principalmente en el área educativa, en los CETis y CBTis, dependientes de la DGETI, desde hace 25 años. Es licenciada en Educación Media, especialidad de Matemáticas, Centro de Actualización del Magisterio–SEG, Acapulco, Guerrero Es candidata a maestra en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas, UAG, Acapulco, Guerrero. Es socia activa de la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas, asistiendo a congresos estatales y nacionales; ha participado como asistente en cursos de actualización y en otros casos como ponente, en las áreas de computación y matemáticas. Ha fungido como asesora, sinodal y organizadora en concursos internos y externos de Matemáticas.

* * *

María Esther Moreno es docente en la Escuela Secundaria General “Ignacio Zaragoza” en Chilpancingo, Guerrero. Estudió la licenciatura en Ingeniería Bioquímica en el Instituto Tecnológico de Acapulco, obteniendo el mejor promedio de su generación. Posteriormente, realizó los estudios de maestría, con especialidad en Matemática Educativa en la Facultad de Matemáticas de la UAG. Ha participado en diversos proyectos obteniendo reconocimientos como: primer lugar en el XIV Concurso Nacional de Creatividad, con el proyecto “Desarrollo de un procedimiento para la producción de maltodextrinas y jarabe de glucosa a partir de almidón de plátano”, en su fase local en el área de Ingeniería Química y Bioquímica; y tercer lugar en el XIV Concurso Nacional de Creatividad, con el proyecto “Desarrollo de un procedimiento para la producción de maltodextrinas y jarabe de glucosa a partir de almidón de plátano”, en su fase regional zona IV en el área de Ingeniería Química y Bioquímica.

E-mail: moda1975@yahoo.com

Graciela Valdez es docente del Subsistema del Nivel Medio Superior de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial. Imparte cursos de Matemáticas en el Centro de Estudios Tecnológicos Industriales y de Servicios 90 en Acapulco, Guerrero. Es aspirante al grado de maestría en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. En colaboración con otros colegas ha desarrollado y presentado en diferentes foros los trabajos: "Situación didáctica como nota de clase: el caso de la elipse" y "Concepciones que tienen los alumnos sobre los ángulos negativos y mayores de 360°", este último publicado en actas de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 18.

* * *

Manuel Juárez es profesor e investigador del Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico y ha sido profesor del programa de maestría en Educación Matemática de la Universidad Autónoma del Estado de Morelos. Actualmente es candidato a doctor en Ciencias por el departamento de Investigaciones Educativas del CINVESTAV. Sus investigaciones han abordado aspectos del desarrollo y aplicación de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación en ambientes educativos, la utilización de la Teoría de la Actividad en el análisis y desarrollo de habilidades lógicas y sobre el aprendizaje en colaboración asistido por computadora (CSCL) y las comunidades de aprendizaje distribuidas en enseñanza de las ciencias. Sobre estos temas ha publicado en diversas revistas convencionales y electrónicas.

E-mail: juarez.manuel@gmail.com

* * *

José Luis Ramírez es profesor e investigador en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Es egresado de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero. Hizo sus estudios de maestría en Matemática Educativa en el CINVESTAV del IPN. Cursó la capacitación en Metodología de la Enseñanza de las Matemáticas en La Habana, Cuba. Máster en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Autónoma de Barcelona, España y los estudios de doctorado en la misma área. Sus líneas de investigación son: "Los procesos cognitivos y dificultades en el aprendizaje de la Lógica de Primer Orden y las Matemáticas Discretas en las carreras de Informática y Sistemas Computacionales; "Estudios comparativos entre teorías educativas sobre la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en el nivel superior tales como la Teoría APOE, la Teoría de la Actividad, la Teoría de Situaciones Didácticas y la Teoría Semiótica.

E-mail: jlram_bcn@yahoo.es

Asuman Oktaą es investigadora titular del departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Es también investigadora adjunta del Cirade (Centre Interdisciplinaire de Recherche sur L'apprentissage et le Développement en Éducation) de la Universidad de Québec, Canadá. Hizo su licenciatura en Educación de las Ciencias con la especialidad en Educación Matemática en la Middle East Technical University en Turquía. Obtuvo su maestría y doctorado en Matemáticas de la University of Iowa en Estados Unidos. Hizo su posdoctorado en la Universidad Concordia en Montreal, Canadá. Su investigación se interesa en los temas de didáctica del Álgebra Lineal y Álgebra Abstracta, educación a distancia, formación de profesores y diseño de actividades para las Matemáticas. Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores.

Correo electrónico: oktac@cinvestav.mx
Página electrónica: http://www.matedu.cinvestav.mx/aoktac.html

* * *

Carlos A. García es profesor de la licenciatura en Matemáticas y el postgrado en Matemática Educativa de la Unidad Académica de Matemáticas, con sede en la ciudad de Acapulco, de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Licenciado en Matemáticas por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Autónoma de Puebla, realizando un estudio de habilidades y competencias matemáticas dirigido por el doctor. Juan Carlos Piceno. Tiene el grado de maestro en Ciencias por el Cinvestav del IPN realizando una investigación en Análisis centrada en el significado basado en el uso. Ha realizado estancias académicas en Concordia University en Montreal y en el INRS de la Universitè du Quebec, Canadá. Actualmente realiza sus estudios de doctorado en el departamento de Matemáticas en la Università degli Studi di Torino, Italia.

E-mail: carlos_agp@hotmail.com

* * *

Carina Ramírez es estudiante de la maestría en Ciencias con especialidad en Matemática Educativa en el Cinvestav del IPN. Ha participado como ponente en diferentes eventos, tales como: la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, la Escuela de Invierno y Seminario Nacional en Didáctica de las Matemáticas, y el Congreso Nacional de la Enseñanza de las Matemáticas.

E-mail: carinarp@hotmail.com

PRÓLOGO
Matemática Educativa.
Algunos aspectos de la Socioepistemología y la visualización en el aula

En la actualidad existen diversas revistas de investigación en Matemática Educativa en donde es posible seguir los hallazgos más recientes en el área, que por su carácter especializado están restringidas a comunidades académicas específicas.

El libro que presentamos es producto de la preocupación de diferentes investigadores por difundir sus principales hallazgos a un sector más amplio que aquel que lee revistas especializadas. Para lograr esto los editores convocamos a diversos colegas de la comunidad mexicana de investigadores en Matemática Educativa para proponer escritos que persiguieran el objetivo de introducir al lector en la complejidad de la problemática que atiende la Matemática Educativa. El método sugerido por nosotros para lograr esto fue partir de la experiencia cotidiana del profesor, para de ahí llevarlo a una reflexión sistemática producto de la investigación en donde son incluidas propuestas para utilizarse en el aula. Como resultado de esta convocatoria, recibimos trabajos de colegas de diversos posgrados o centros de investigación en Matemática Educativa nacionales, tales como el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, y los centros de investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Chiapas y de la Universidad Autónoma de Guerrero.

La diversidad de los escritos es producto de la variedad de los acercamientos a la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Tal variedad puede ser agrupada en tres categorías que se corresponden con las tres partes del libro:

- *La socioepistemología de la Matemática de la variación*, que contiene diversos acercamientos a la problemática de la Matemática de la variación y el cambio, y las explicaciones y tratamientos que la aproximación socioepistemológica proporciona.

- *La visualización y registros de representación*. En esta segunda categoría se encontrarán aquellos escritos que han centrado su interés en el papel de la visualización en el aula. Y, por último,
- En *aspectos del lenguaje proposicional y el Álgebra Lineal* se encontrarán estudios sobre la problemática presente en el Álgebra Lineal y el lenguaje proposicional.

A continuación brindamos un breve recorrido por los escritos que el lector encontrará.

PARTE I. La socioepistemología de la Matemática de la variación

En "*La integral definida: un enfoque socioepistemológico*", Guadalupe Cabañas y Ricardo Cantoral presentan los resultados parciales de una investigación relacionada con una particular interpretación de la integral definida desarrollada en el marco de la *aproximación socioepistemológica a la investigación en Matemática Educativa*; se parte del tratamiento de la noción de área al nivel de actividad en la vida cotidiana (*repartir*, *comparar* y *reproducir*, *medir*, *cuantificar* y *conservar*). Además describen el tratamiento escolar de la integral definida que suele ser usado en la enseñanza contemporánea, y discuten algunos resultados de investigación que exhiben las dificultades de los estudiantes ante dicho tratamiento. Se presentan, ejemplos de actividades que incorporan la noción de conservación del área en construcciones vinculadas al tratamiento de regiones geométricas planas, descritas en términos sintéticos o descritas en términos analíticos.

En "*Rediseño del Cálculo Integral escolar fundamentado en la predicción*", Germán Muñoz presenta algunos aspectos de la problemática de la enseñanza del Cálculo Integral, así como una revisión del tratamiento escolar en algunos textos de Cálculo con el fin de observar algunos efectos del discurso matemático escolar vigente en los profesores y estudiantes. Además, analiza diferentes acercamientos a la enseñanza del cálculo-análisis para ubicar una visión alternativa para rediseñar el Cálculo Integral escolar a través de un análisis histórico-epistemológico como base para construir un campo conceptual fundamentado en la práctica social de *predecir.* A partir de lo anterior, el autor propone una alternativa para el tratamiento escolar del Cálculo Integral por medio de la discusión de *situaciones* en el contexto de la Cinemática y de actividades didácticas diseñadas con una metodología delineada para rediseñar el Cálculo Integral escolar con base en prácticas sociales.

En "*Lo periódico: una revisión en el marco de la Socioepistemología*", Gabriela Buendía plantea que el discurso matemático escolar ha reducido la propiedad periódica a un equivalente con la definición, de tal manera que el uso de esta propiedad se limita a comprobar o aplicar una fórmula. A la luz de la Socioepistemología, la autora da evidencia de que todo aquello que tiene que ver con la periodicidad en un sentido institucional, histórico y cultural, conforma un lenguaje que le da un significado útil al conocimiento matemático. En particular, da evidencia de la relación entre lo periódico y la práctica de predecir.

En "*Un estudio didáctico relativo a la noción de convergencia*", Rosa María Farfán muestra resultados de investigaciones que tratan sobre el estado estacionario y su estrecha relación con el concepto de convergencia de series. Para ello inicia exponiendo la problemática escolar y los efectos en el aprendizaje de los estudiantes y se discute el surgimiento de la noción de convergencia. La autora plantea al lector una serie de interrogantes y propuestas de diseño de investigación con el ánimo de involucrarlo en el camino de la investigación.

En el artículo de Gustavo Martínez, "*Sobre la naturaleza y significados de los exponentes. Un caso de los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento*", es presentado un estudio sobre la naturaleza y significados de los exponentes dentro de la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Se mostrará que tales significados son construidos a través de un proceso de generación de conocimiento al que se ha denominado como *convención matemática* y que surge ante la necesidad, socialmente compartida, de construir cuerpos unificados y coherentes de conocimiento matemático (es decir, para la integración sistémica de conocimientos). La identificación del proceso de convención matemática y su caracterización lleva a presentar una explicación de las diferentes respuestas de los estudiantes, relacionadas con los exponentes, y a presentar algunas situaciones didácticas para ser exploradas en el aula.

En *"La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas*", Crisólogo Dolores Flores presenta un análisis acerca de la enseñanza de la derivada vista desde la perspectiva de los textos más usuales de Cálculo Diferencial y de los programas de estudio. El análisis se centra en la formación, tratamiento y los elementos propuestos para su fijación o asimilación. El autor parte de la premisa de que, en la enseñanza de la Matemática en general se tratan conceptos y sus definiciones, relaciones o teoremas, procedimientos y actividades (ejercicios o problemas) tendientes a la asimilación del contenido. El análisis utiliza como referente fundamental el papel de la variación en la formación y asimilación del concepto de derivada. Se culmina con la detección de las tendencias sobre su enseñanza revisando otros documentos bibliográficos especializados que reflejan la situación acerca del concepto en cuestión en el mundo. Al final se proponen varias actividades cuyo propósito es lograr un primer acercamiento a la derivada por la vía variacional.

PARTE II. La visualización y registros de representación

En el artículo "*Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos*", Miguel Díaz Cárdenas presenta una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto de lugar geométrico (específicamente el caso de la parábola) que involucra aspectos de visualización a través de Geometría Dinámica, con el propósito de provocar el cambio conceptual en los estudiantes que, de acuerdo con el autor, es posible a través de las generalizaciones que se producen y que pueden sostenerse de forma más efectiva por medio de métodos visuales con el auxilio de un soporte computacional. La propuesta atiende las peculiaridades del proceso de formación de conceptos y sus representaciones de acuerdo con Jungk y Duval y se desarrolla bajo el enfoque de resolución de problemas.

En "*Una alternativa para el tratamiento de los límites* $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$ *y* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{x} = 0$*: una secuencia didáctica*", Catalina Navarro y Ricardo Cantoral presentan el resultado de un estudio didáctico basado en una particular aproximación teórica a la investigación, una forma de abordar los límites especiales referidos en el título, diferente de aquellas presentaciones que son dadas en libros de texto de Cálculo Diferencial e Integral. Los autores primero recurren a la visualización de las transformaciones gráficas de funciones algebraicas y a ciertas operaciones gráficas entre ellas, luego trabajan tales transformaciones y operaciones gráficas pero con funciones trigonométricas, con la intención de localizar características comunes entre funciones algebraicas y funciones trigonométricas. Finalmente, abordan de manera simultánea las mismas operaciones gráficas para ambos tipos de funciones, algebraicas y trigonométricas, y se ocupan de la suma, la resta, la multiplicación y la división específicamente cuando se realiza el paso al límite.

En "*La Geometría Analítica: ¿cómo presentarla de manera interesante para los alumnos de educación media superior?*", Santiago Ramiro y sus colaboradores describen una situación didáctica como nota de clase sobre la elipse, elaborada con la participación de profesores de Matemáticas de nivel medio superior. Los autores postulan que uno de los problemas del aprendizaje de las Matemáticas que específicamente afecta a la construcción de saberes en Geometría Analítica, consiste en las deficiencias de los alumnos para realizar una representación coordinada de un contenido matemático.

PARTE III. Aspectos del lenguaje proposicional y el Álgebra Lineal

En *"¿Cómo propiciar el desarrollo de la habilidad para traducir enunciados del lenguaje natural al lenguaje de la lógica proposicional? Una propuesta a partir de la Teoría de la Actividad*", Cándido Manuel Juárez y José Luís Ramírez sostienen que el dominio de la habilidad para traducir enunciados del lenguaje natural (LN) al lenguaje de la lógica proposicional (LP) es un elemento esencial para la comprensión de la modelación de enunciados argumentativos, es decir, en la formalización de argumentos. Esta habilidad también se hace patente en temas relacionados con la *representación del conocimiento*, la *especificación de datos*, las *bases de datos relacionales,* particularmente en el área de Ciencias de la Computación, y en general en el desarrollo de la habilidad para leer un texto matemático. Los autores presentan una propuesta para propiciar el desarrollo de la habilidad para traducir enunciados del LN a fórmulas bien formadas (FBF) de la LP. La propuesta se inscribe en el marco conceptual de la Teoría de la Actividad y surge como una alternativa a los problemas observados en los cursos de Lógica, Matemáticas Discretas e Inteligencia Artificial cuando se le pide al estudiante que haga la traducción de enunciados del LN al lenguaje de la LP.

En "*Diseño de actividades: ejemplos de Álgebra Lineal*", Asuman Oktaç, Carlos García y Carina Ramírez sostienen que el diseño de actividades y preguntas es una parte importante del trabajo cotidiano del docente de Matemáticas y que, para salirse de los problemas estándares y para construir situaciones interesantes que pueden proporcionar información acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes, se necesita considerar criterios que se relacionen con diferentes propósitos didácticos. En este trabajo los autores presentan una clasificación de actividades con ejemplos que pueden ser útiles a los profesores, enfocándolos en el tema de Álgebra Lineal.

Los editores
Chilpancingo, Guerrero
Septiembre de 2005

6

La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas

Crisólogo Dolores Flores[1]

RESUMEN

En este capítulo se presenta un análisis acerca de la enseñanza de la derivada vista desde la perspectiva de los textos más usuales de Cálculo Diferencial (CD) y de los programas de estudio. El análisis se centra en la formación, tratamiento y los elementos propuestos para su fijación o asimilación. Se parte de la premisa de que en la enseñanza de la Matemática, en general, se tratan conceptos y sus definiciones, relaciones o teoremas, procedimientos y actividades (ejercicios o problemas) tendientes a la asimilación del contenido. El análisis utiliza como referente fundamental el papel de la variación en la formación y asimilación del concepto de derivada. Se culmina con la detección de las tendencias sobre su enseñanza revisando otros documentos bibliográficos especializados que reflejan la situación acerca del concepto en cuestión en el mundo. Al final se proponen varias actividades cuyo propósito es lograr un primer acercamiento a la derivada por la vía variacional.

Palabras clave: derivada, enseñanza, textos y programas, variacional.

1. INTRODUCCIÓN

Para caracterizar la enseñanza de la derivada en el bachillerato de la región y el papel que en ella juega el estudio de la variación, a continuación se presenta un análisis sobre los textos y los programas. Para facilitar el análisis, el contenido de los textos fue clasificado en conceptos, relaciones y procedimientos en el sentido como se conciben en Jungk (1985). Entre los primeros se incluyen los conceptos

[1] Centro de Investigación en Matemática Educativa, UAG. Chilpancingo, Guerrero, México.

más importantes y se revisa de ellos la naturaleza de sus definiciones, la secuencia en que están ordenadas y su relación con el estudio de la variación. En cuanto a las relaciones, se revisa cuáles son los teoremas, propiedades y reglas más importantes que los autores proponen como elementos precedentes al tema de derivada y el concerniente a este mismo concepto. En lo que se refiere a los procedimientos, se indaga qué habilidades se pretenden desarrollar con los ejercicios y problemas planteados y qué relaciones guardan éstas con los problemas de la variación.

En el mercado existen decenas de libros de texto de Cálculo, sin embargo la revisión que aquí se presenta fue realizada a los textos de uso frecuente en el bachillerato de la región. Su selección fue determinada con base en cuatro criterios: los que con más frecuencia se citan en los programas oficiales de los tres subsistemas de educación media superior en el estado de Guerrero, los que con mayor frecuencia fueron citados en una encuesta realizada exprofeso a 9 profesores de Cálculo y a 183 estudiantes de las escuelas preparatorias de la UAG en el año de 1990, los que mayor demanda comercial tienen en el medio y los que invariablemente se encuentran disponibles en las bibliotecas. Bajo estos criterios, se seleccionaron los textos Cálculo Diferencial e Integral de W. A. Granville, el de A. Anfossi y M. A. Flores Meyer, el de F. Jr. Ayres y el de M. Santaló y V. Carbonell. Por otro lado, siguiendo un esquema parecido al utilizado en el análisis de los textos, se hace un análisis sobre el enfoque, objetivos y contenidos que declaran los programas de CD del nivel medio superior del estado de Guerrero. Para ampliar el panorama se consultaron tres trabajos de corte curricular que atañen a 22 países iberoamericanos, a 13 países de la Comunidad Europea, de Hungría, de Japón y de los Estados Unidos de Norteamérica.

2. CONCEPTOS PRECEDENTES A LA DERIVADA EN LOS TEXTOS

Se considera que los autores tratan tal o cual concepto, si éstos son anunciados en los capítulos o temas y se dan sus definiciones correspondientes. Bajo estas premisas los textos revisados invariablemente presentan los conceptos de: variable, función, límite y continuidad, antes de introducir el concepto de derivada (ver Tabla 1).

El concepto de variable en el texto de W. A. Granville se define como *una cantidad a la que se le puede asignar, durante el curso de un proceso de análisis, un número ilimitado de valores,* las simboliza con las últimas letras del alfabeto, en cambio a aquéllas que su valor se mantiene fijo les denomina constantes.

Anfossi/F. Meyer no da una definición explícita, sino que mencionan que en las investigaciones matemáticas intervienen dos clases de cantidades, unas que son constantes y otras que son variables.

Tabla 1. Conceptos precedentes a la derivada en los textos.

W. GRANVILLE	ANFOSSI/ F. MEYER	F. JR. AYRES	SANTALÓ/ CARBONELL
▪ Variable y constante	▪ Variable y constante	▪ Números reales	▪ Relación y función
▪ Intervalo	▪ Función	▪ Valor absoluto	▪ Variable
▪ Variación continua	▪ Función algebraica y trascendente	▪ Intervalos	▪ Dominio e intervalo de variable
▪ Funciones	▪ Función entera y fraccionaria	▪ Función de una variable	▪ Constantes absolutas, parámetros
▪ Variable dependiente e independiente	▪ Función explícita e implícita	▪ Sucesión infinita	▪ Límite de una sucesión
▪ Límite de variables	▪ Función simple y compuesta	▪ Límite de sucesiones	▪ Límite de una función
▪ Límite de una función	▪ Función de función e inversa	▪ Límite por la derecha y por la izquierda	▪ Función continua
▪ Función continua y discontinua	▪ Funciones logarítmicas y circulares	▪ Límite de una función (los ε y los δ)	▪ Función discontinua
▪ Límites infinitos	▪ Límite	▪ Función continua	▪ Continuidad (discontinuidad) en un intervalo
▪ Infinitésimo	▪ Función continua y discontinua	▪ Función discontinua	▪ Incrementos
	▪ Series (convergente, divergente, armónica, alternante)		
	▪ El número *e* como límite de una suma		
	▪ Logaritmo		

El término *cantidades* puede ser motivo de ambigüedades y causar confusiones en los estudiantes dado que en la práctica generalmente se les relaciona con números *estables* y por tanto no admiten un número ilimitado de valores; también la definición dada por W. A. Granville tiene sus inconvenientes ya que existen variables que no necesariamente admiten un número ilimitado de valores. Santaló/Carbonell y F. Jr. Ayres dan definiciones de corte conjuntista: el primero establece que una variable es *la totalidad de elementos de un conjunto que se le representa con una letra*, esta definición es evidentemente errónea pues la variable es el símbolo que representa a un elemento arbitrario del conjunto y no a la totalidad de ellos; en el segundo caso la definición es menos problemática y es referida a intervalos de la recta real, son denotados como $a<x<b$ en donde el símbolo x es la variable que representa un número cualquiera del conjunto de números reales comprendidos entre las constantes a y b.

El concepto de función en los textos de W. A. Granville y Anfossi/F. Meyer se define como la relación entre dos variables, de modo que la variable dependiente y es designada como *función* de la variable independiente x, aunque W. A. Granville establece su existencia cuando el valor de la primera queda determinada si se da un valor a la segunda, y Anfossi/F. Meyer introduce la propiedad de *correspondencia uno a uno*. En el mismo sentido está planteada en el resto de los textos, con la diferencia de que Santaló/Carbonell primero define el concepto de *relación* y a la función la define como un caso particular de aquélla. Todos estos textos plantean las definiciones de variable y función para luego dar escasos ejemplos de la Geometría o de la Física para ilustrar el significado de las variables. No se explotan la relación entre los fenómenos de la variación y el concepto de función como modelos que los describen en F. Jr. Ayres, solamente se resuelven a manera de ejemplo dos problemas asociados a la variación, uno sobre áreas y otro sobre volúmenes, de los que se extraen las funciones. Todo indica que la pretensión de los autores es estudiar estos conceptos en el contexto puramente matemático y buscarle algunas interpretaciones prácticas pero sólo como complemento, sin explotar el origen que estos conceptos tienen en la modelación de los fenómenos de la variación.

El concepto de límite es definido en todos los textos revisados a la usanza de Weierstrass aunque con algunas diferencias en cuanto a terminología. Esencialmente plantean:

> Se dice que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ si dado un ε tan pequeño como se quiera existe un δ tal que si $0 < |x - a| < \delta$ se verifica que $0 < |f(x) - A| < \varepsilon$.

Mayoritariamente la definición está motivada por cuestiones intramatemáticas, en especial por el análisis del comportamiento de algunas sucesiones. Particularmente, Anfossi/F. Meyer lo introduce por medio del cálculo del área de un cuadrado inscribiendo sucesivamente otros cuadrados de menor tamaño; este problema conduce al cálculo del límite de una serie. El estudio de sucesiones convergentes es utilizado por casi todos los textos con el fin de explicar que la idea de límite está asociada a la idea de aproximación hacia un valor fijo y que este valor, no necesariamente es un término de la sucesión. Particularmente Santaló/Carbonell y F. Jr. Ayres introducen la idea de límite analizando sucesiones del estilo 2.5, 2.9, 2.99... F. Jr. Ayres agrega algunas propiedades de los límites laterales. Todos los textos analizados trabajan sólo la continuidad puntual y la relacionan con los gráficos que no presentan *saltos* o *huecos* después de dar una definición formal. W. A. Granville considera como condición suficiente para la continuidad, que el límite y el valor de la función sean iguales en el punto. Anfossi/F. Meyer también utilizan el concepto de límite para definir la continuidad, bajo la condición de que para un incremento sumamente pequeño de la variable independiente le corresponda un incremento también sumamente pequeño a la variable dependiente, aunque en la parte de observaciones la define como lo hace F. Jr. Ayres. Éste último y Santaló/Carbonell, plantean que, una función f es continua en x_0 si:

I) está definida $f(x_0)$;

II) existe el límite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ y

III) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Por lo general, en los textos se ejemplifica la continuidad o discontinuidad utilizando las gráficas de funciones del estilo: $f(x)=1/x$ y $g(x)=(x^2 - 4)/(x - 2)$, haciendo notar sus *interrupciones*. Tanto el concepto del límite como el de continuidad no son introducidos a partir de la necesidad de explicar los fenómenos de la variación, más bien son estudiados por la Matemática misma.

3. RELACIONES Y OPERACIONES PRECEDENTES

De los textos revisados, solamente F. Jr. Ayres en el primer tema, Variables y Funciones, hace referencia a algunas propiedades de las desigualdades, éstas las utiliza para representar intervalos de variación. En cuanto a funciones, sólo Santaló/Carbonell trabaja algunas propiedades de las funciones y sus gráficos, caracteriza su crecimiento, decrecimiento, sus puntos máximos o mínimos, intervalos donde es negativa, positiva, etc. No se da en los textos una justificación formal para la operatoria de funciones. Previo a la derivada, todos los textos establecen los teoremas básicos del álgebra de los límites y agregan los criterios para calcular límites que conducen a formas del tipo 0/0, ∞/∞. Sólo Anfossi/F. Meyer introduce los límites especiales:

$$\underset{x\to 0}{lím}\frac{sen\ x}{x}=1;\quad \underset{x\to 0}{lím}\frac{tan\ x}{x}=1;\quad \underset{m\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=e$$

Y establece algunas condiciones para la convergencia de sucesiones; al tratar al límite se inicia el estudio de las series y relaciona los límites de éstas con su convergencia. También en el tema de límites, W. A. Granville presenta algunos teoremas relativos a los infinitésimos que no los utiliza para definir la derivada. En cuanto a la continuidad, el libro de F. Jr. Ayres plantea tres de las propiedades (teoremas) de las funciones continuas, fundamentalmente las que sustentan la existencia del valor nulo y de valores máximos o mínimos de este tipo de funciones.

En cuanto a los procedimientos, W. A. Granville propone sólo dos bloques de ejercicios en los que pide *demostraciones* que no son tales, ya que sólo requieren transformaciones algebraicas y calcular límites. Mayor cantidad de ejercicios proponen el resto de los textos, en general proponen los relacionados con la evaluación, clasificación, graficación, determinación del dominio, cálculo de límites y determinación de continuidad de funciones algebraicas. A diferencia de Anfossi/F. Meyer, plantea ejercicios sobre composición de funciones, convergencia o divergencia de series y el cálculo de límites de funciones trascendentes. Es notorio que sólo Santaló/Carbonell plantean un bloque de ejercicios en donde se pide analizar funciones simples a partir del *examen visual* de sus gráficos. A excepción de F. Jr. Ayres, los textos no plantean problemas en los que se pida al lector obtener el modelo matemático de función o límite; en la mayoría de los casos los modelos (fórmulas de funciones) son dados por el autor. Se percibe en los ejercicios y problemas propuestos en los textos, una tendencia marcada hacia el uso de algoritmos, presentando muy pocos en donde se requiere que la heurística juegue el papel principal, la variedad es escasa y muchos de ellos implican el uso repetitivo de técnicas preestablecidas, prácticamente todos ellos son de corte intramatemático y no se plantean problemas relacionados con la variación física.

4. TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE DERIVADA

El tratamiento de la derivada en los textos sigue, casi invariablemente, la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, notación, regla general para la derivación e interpretación geométrica (ver Tabla 2). Todos definen a la derivada prácticamente en los mismos términos:

> La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero, en símbolos:
>
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
>
> Siempre que este límite exista.

Tabla 2. Contenidos relativos a la derivada.

W. GRANVILLE	ANFOSSI/ F. MEYER	F. JR. AYRES	SANTALÓ/ CARBONELL
Incrementos	Incrementos	Incrementos	Cociente de incrementos
Comparación de incrementos	Derivada	Derivada	Derivada en un punto
Derivada de una función	Operaciones para la derivación (regla de los 4 pasos)	Cálculo de derivadas (regla de los 4 pasos)	Función derivada y notaciones
Notación para derivadas	Cálculo de derivadas por medio de la regla general	Interpretación geométrica y física	Obtención de la función derivada (regla de los 4 pasos)
Regla general de derivación (regla de los 4 pasos)	Representación geométrica de la derivada		Derivadas sucesivas
Cálculo de derivadas (regla los 4 pasos)	Aplicación (obtención de ecuaciones de tangentes)		Reglas y fórmulas de derivación
Interpretación geométrica			Interpretación geométrica

En la mayoría de los textos, el concepto de derivada es introducido por medio de un ejemplo específico en donde se utilizan las aproximaciones numéricas de los incrementos, de modo que se analiza la sucesión de cocientes $\Delta y/\Delta x$ cuando al Δx se le asignan valores muy próximos a cero. El uso de las aproximaciones numéricas es muy escaso en el texto de F. Jr. Ayres. En W. A. Granville, una vez que construye la definición de derivada, la detalla paso a paso para dar lugar a la regla general de derivación, después propone 29 ejercicios en donde se pide calcular la derivada de igual número de funciones por medio de la regla general, y finalmente da la interpretación geométrica. El texto de Anfossi/F. Meyer sigue prácticamente la misma secuencia, sólo que la interpretación geométrica se presenta después de la regla de los cuatro pasos (ver Tabla 2).

Más tardíamente dan la interpretación geométrica dado que para llegar a ella le preceden la regla de los cuatro pasos y las fórmulas básicas de derivación. En general, el tratamiento que los textos le dan a la derivada no es motivado por el estudio de los fenómenos de variación o por partir del problema de las tangentes, la mayoría utilizan introducciones de corte numérico y en lo analítico se reduce al trabajo algebraico con los incrementos al aplicar la regla de los cuatro pasos. La interpretación geométrica es planteada después de la definición y ésta consiste en considerar a la derivada como la pendiente de la tangente a la gráfica de la función, la relación con los problemas de la variación física son tratados hasta el capítulo dedicado a las aplicaciones. Para la asimilación del concepto de derivada, la mayoría de estos textos plantean ejercicios de obtención de derivadas mediante la regla de los cuatro pasos, la obtención de pendientes de curvas y tangentes, la determinación de ecuaciones de tangentes y normales y el cálculo del ángulo de intersección entre dos curvas. Solamente F. Jr. Ayres, en la parte tanto de problemas resueltos como de problemas propuestos, plantea un ejercicio en donde se requiere del cálculo de la velocidad media y de la velocidad instantánea.

En resumen, antes de arribar al concepto de derivada, todos los textos revisados tratan los conceptos de variable, función, límite y continuidad, aunque con ligeras variantes. Si se atiende al rigor matemático, éste es más acentuado en los textos de Santaló/Carbonell y F. Jr. Ayres, en ellos se definen los conceptos básicos en términos conjuntistas (o por medio de los ε y δ en el caso del límite en F. Jr. Ayres), mientras que en los otros se utilizan las cantidades y las magnitudes. Si se atiende a la cantidad de contenidos previos, éstos son mucho más abundantes en el texto de Anfossi/F. Meyer, particularmente cuando se trata el tema de las funciones y los límites; el tratamiento de los contenidos previos a la derivada es más sucinto en W. A. Granville. Mayoritariamente los textos trabajan con funciones algebraicas polinómicas, racionales e irracionales a excepción de Anfossi/Flores, quienes hacen un tratamiento muy amplio sobre diversas clases de funciones. El tratamiento del concepto de derivada en los textos revisados se ciñe a la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, notación, regla general de derivación y, por último, su interpretación geométrica. En su mayoría, este concepto es generado mediante aproximaciones numéricas para explorar el límite del cociente $\Delta y/\Delta x$ cuando a Δx se le asignan valores muy próximos a cero (aunque en los problemas propuestos no se plantea ningún ejercicio de esta naturaleza), luego se trabaja con la regla de los cuatro pasos para calcular derivadas, finalmente se plantean problemas relacionados con las tangentes, las normales y el ángulo de intersección entre dos curvas. Solamente F. Jr. Ayres propone un ejercicio sobre velocidades instantáneas, en el resto, algunos problemas de este tipo son planteados hasta en el tema de las aplicaciones.

5. LA DERIVADA EN LOS TEXTOS TRADICIONALES

Utilizando los textos aquí revisados, difícilmente los estudiantes podrán comprender la esencia del concepto de derivada. En aras del predominio de cierto rigor matemático (malogrado en algunos) y su empeño acentuado en el aprendizaje de algoritmos, omiten las relaciones claves que este concepto tiene con la variación. En estos textos las motivaciones y el tratamiento de los conceptos básicos del CD y en particular de la derivada, siguen una *línea* de corte intramatemático, de modo que son presentados como conceptos abstractos que parecen tener existencia sólo dentro de la misma Matemática. Si acaso se relacionan con la realidad es para exponer ejemplos esporádicos muy puntuales que pronto son relegados u omitidos.

Todo indica que los textos sacrifican el desarrollo de ideas y significados variacionales de los conceptos básicos del Cálculo imponiendo el predominio del trabajo algorítmico. Todos plantean la interpretación geométrica de la derivada como complemento o como parte de las aplicaciones, pero ésta es sólo una forma de interpretarla y además en cierto sentido esconde su naturaleza variacional. Mediante las ideas de la variación, particularmente de la rapidez de la variación, se puede hacer patente la esencia de este concepto. Con la interpretación geométrica la variación queda escondida, tanto la pendiente de la tangente como su interpretación geométrica da idea de *algo* estático, en cambio la derivada es un concepto dinámico. Dinámico en el sentido de que cuantifica el cambio y lo cuantifica de una manera muy especial, proporcionando un índice o razón de cambio, bien en un punto o en todo un intervalo. En la cuantificación del cambio encuentran su razón de ser los conceptos básicos del Cálculo (y por supuesto, la derivada), por eso muchos matemáticos suelen caracterizar al Cálculo y al Análisis Matemático en general, como la Matemática del cambio. Los textos usuales están muy lejanos de reflejar esta característica fundamental del Cálculo.

Por otro lado, para llegar al concepto de derivada los textos recorren un largo camino, dado que la asumen como un límite especial existente sólo para las funciones continuas, esto exige el establecimiento de toda una cadena de definiciones previas de conceptos involucrados en la definición. Esto obliga a definir previamente el límite y la continuidad, a establecer sus propiedades, pero éstos a su vez están definidos en términos de números reales y asociados a las funciones, por eso se hace necesario definirlos también y estudiar sus propiedades. Si este volumen de contenidos es llevado al aula cabe entonces preguntarse: ¿Tiene sentido hacer que los estudiantes recorran este camino tan largo para arribar a la derivada? Los textos revisados seguramente se ajustaron a ciertas condiciones de desarrollo de la enseñanza del Cálculo y quizá se sujetaron a ciertos programas preestablecidos. Pero de cualquier manera parece que este recorrido es innecesario por varias razones, y una de las más inmediatas está relacionada con el tiempo oficial otorgado al curso de CD. Por tal razón, los profesores frecuentemente dicen *que no les dio tiempo* para siquiera llegar al concepto de derivada pues la mayor parte del tiempo se les consumió en el tema de las funciones y los límites. Hace falta diseñar nuevos materiales que coloquen a las ideas de la variación y el significado físico de los conceptos del Cálculo, en especial de la derivada, como los elementos centrales de este curso y que, a partir de las necesidades determinadas por la explicación, modelación y predicción de los fenómenos de la variación, se simplifique y determine el contenido pertinente.

6. LA DERIVADA Y EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LOS PROGRAMAS

En el estado de Guerrero, los estudiantes del nivel medio que realizan estudios de bachillerato lo hacen en tres tipos de planteles: los que dirige directamente la

Secretaría de Educación Pública a través de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial (DGETI)[2] o de la Dirección General de Educación Tecnológica Agropecuaria (DGETA)[3]; en los planteles del Colegio de Bachilleres (COBACH) que dirige el Gobierno del Estado; y en las escuelas preparatorias que dependen de la Universidad Autónoma de Guerrero. En este Estado, y en el resto del país, la educación media superior se ofrece después de la educación media básica (secundaria), y orienta los estudios hacia tres alternativas: la propedéutica, la terminal y la bivalente. La primera encauza a los estudiantes hacia las licenciaturas, la segunda hacia el trabajo técnico de producción o de servicios y la tercera hacia ambas finalidades. En los bachilleratos de la primera y la tercera opciones generalmente se incluye el estudio del CD, el subsistema DGTI lo incluye en el 4º semestre, el COBACH y algunas preparatorias de la UAG en el 5º. Según el Diagnóstico para la Modernización de la Educación en el estado de Guerrero, en el año escolar 1989-90, las preparatorias de la UAG atendían el 49% de la población escolar total del nivel medio superior y, entre los Colegios de bachilleres y planteles dirigidos directamente de la SEP, atendían el 30%. En términos de población escolar, resulta representativo un análisis de los programas de estos subsistemas y se puede obtener de él información sobre la enseñanza de la derivada y el CD en las escuelas del nivel medio superior del estado de Guerrero.

En virtud de que los programas analizados únicamente declaran objetivos y contenidos (uno de ellos agrega actividades de aprendizaje), sólo se puede obtener de ellos un panorama general acerca de cómo sugieren sea tratado el CD y la derivada. En cuanto al *enfoque* del contenido y los *objetivos generales*, los programas de DGETI y el COBACH plantean un tratamiento del CD en forma intuitiva e informal, reconocen su relación con los problemas de la Física y la Geometría, por lo que se sugiere relacionar los contenidos con problemas de la realidad. En el segundo programa se declara a las funciones como el eje organizador de los contenidos en tanto que el primero (dado el carácter tecnológico de los bachilleratos a los que se dirige) destaca las aplicaciones tecnológicas del CD y no declara ningún núcleo orientador. En los programas de las preparatorias de la UAG no encontramos ninguna alusión al enfoque ni a la concepción general del curso. En los objetivos generales declarados en los programas del

[2] Que dirige a los centros de estudios tecnológicos industrial y de servicios (CETis), los centros de bachillerato tecnológico industrial y de servicios (CBTis) y los centros de estudios tecnológicos del mar (CET mar).

[3] Que dirige a los centros de estudios tecnológicos agropecuarios (CBTA) y a los centros de estudios tecnológicos forestales (CBTF).

COBACH y de la UAG (ver Tabla 3) se declara el adquirir o comprender el concepto de derivada y en el de DGETI se perciben inclinaciones marcadas hacia el trabajo algorítmico y no se hacen referencias a la comprensión de este concepto. De una revisión global a los citados programas se aprecia que las pretensiones son que los estudiantes profundicen más sobre funciones, que sepan derivar y que puedan aplicar la derivada a problemas de máximos y mínimos, aunque en los programas de la UAG sólo se declara que los alumnos comprendan el concepto de derivada y puedan derivar funciones.

Tabla 3. Objetivos generales que declaran los programas de Calculo Diferencial.

PROG.	OBJETIVOS GENERALES	OBJETIVOS ASOCIADOS
DGETI	Desarrollar la habilidad de reconocimiento de la dependencia entre una magnitud con respecto a otra (funciones). La habilidad de mecanismos de cálculo que le permitan analizar situaciones entre la dependencia, entre variantes y relaciones de comportamiento de la variación.	Explicar a las funciones como un modelo que representa un problema real de dependencia entre dos magnitudes. Utilizar los algoritmos de derivación en funciones algebraicas y trascendentes. Resolver problemas prácticos que impliquen el uso de la derivada y la diferencial.
COBACH	...que el estudiante amplíe y profundice el estudio de las funciones a partir de su clasificación, su representación gráfica y los conceptos de continuidad y límite, asimismo partir de problemas de velocidad instantánea de un móvil o de pendiente de la recta tangente a una curva, el estudiante adquirirá el concepto de derivada y derivará funciones algebraicas y trascendentes, con lo cual podrá aplicar la derivada en la solución de problemas concretos que involucren máximos y mínimos.	
UAG	Al terminar el curso el alumno comprenderá lo que es "derivada de una función" y podrá efectuar con facilidad el proceso general de derivación.	

Previo a la derivada, los programas sugieren que se estudien las funciones, sus límites y su continuidad; *posterior a la derivada* sugieren el tratamiento de los procedimientos de derivación, las aplicaciones de la derivada al análisis de funciones y la resolución de problemas de optimización. En cuanto a relaciones, proponen estudiar las propiedades de funciones algebraicas y trascendentes y de sus gráficos, así como las operaciones básicas con ellas. Los teoremas sobre el álgebra de los límites son de estudio obligado según los programas; respecto a la continuidad en ningún programa se sugiere ir más allá de la elemental asociación entre este concepto y las gráficas de funciones que no presentan *rupturas*. En cuanto a los procedimientos, los programas generalmente sugieren que los estudiantes deben ser capaces de clasificar funciones, que puedan representarlas gráficamente y realizar las operaciones básicas con ellas, solamente en el programa del COBACH se pretende además que puedan realizar análisis de los gráficos de funciones, a excepción de uno de los programas de las preparatorias de la UAG (el aprobado en 1981)[4] se sugiere que los estudiantes puedan calcular límites, en especial los que conducen a las formas indeterminadas. El contenido previo a la derivada en el programa homologado de CD avalado por la Coordinación de Educación Media Superior de la UAG (CENMSUAG) es prácticamente el mismo que el señalado por los demás programas, aunque se nota cierta tendencia hacia una estructuración más formal desde el punto de vista matemático, ya que se agrega la relación entre el límite y la continuidad no contemplada en el resto de los programas. En este programa no se declaran objetivos, en cambio aparece un apartado titulado *descripción del programa* donde se hace una serie de recomendaciones puntuales para tratar el contenido. Los objetivos generales del curso se encuentran en el *Plan de Estudios 1995*, en este documento se fusionan los contenidos de los programas homologados de junio de 1994 (el de CD y el de Cálculo Integral). Los objetivos generales allí declarados se centran en consolidar el manejo y aplicación del concepto de función, en que los estudiantes compren-

---

[4] En prácticamente toda la década de los 90, se trabajó con dos planes de estudio distintos dentro de las escuelas preparatorias de la UAG. En uno de ellos el programa de Cálculo Diferencial está propuesto para el 5º semestre (aprobado en 1974), su estructura consta de tres apartados: Funciones y Límite, Derivadas y Máximos y Mínimos. En él no se declaran objetivos a alcanzar, no se declaran expresamente los contenidos ni mucho menos lineamientos didácticos, más bien son una especie de *notas* en las cuales se dan una serie de definiciones y procedimientos. En lo que concierne a la derivada, las notas siguen la secuencia: incrementos, cociente incremental, límite del cociente incremental, reglas de derivación para funciones de la forma $y = mx + b$, de sumas, productos, cocientes de funciones y de funciones de la forma $y = x^n$, y finalmente su interpretación geométrica y aplicaciones al cálculo de velocidades y aceleraciones. En el año escolar 1995-1996 se pretendió introducir nuevos planes y programas de estudio; hasta nuestras manos ha llegado un ejemplar del *Programa Homologado de Cálculo Diferencial* y el de *Cálculo Integral* fechados en Junio de 1994, y el *Plan de Estudios 1995*. Finalmente en el año de 1999 se pone en operación el nuevo plan de estudios generado por los trabajos precedentes ya citados.

dan y manejen el concepto de derivada, que desarrollen habilidades en el cálculo de derivadas e integrales y que puedan aplicar el Cálculo Diferencial e Integral en la resolución de problemas prácticos.

Tabla 4. Objetivos que declaran los programas de calculo diferencial relativos a la derivada.

<table>
<tr><th>DGETI</th><th>COBACH</th><th>PREPARATORIAS UAG</th></tr>
<tr><td>Interpretar la razón de cambio promedio como una rapidez de variación.</td><td>Por medio de los problemas de velocidad instantánea de un móvil o pendiente de la recta tangente a una curva que conceptualice y obtenga la definición de derivada.</td><td>El alumno interpretará gráficamente el concepto de derivada.</td></tr>
<tr><td>Interpretar la rapidez de variación instantánea como el límite de la rapidez de variación en un punto.</td><td>Utilice la definición derivada en la derivación de funciones polinomiales y obtenga algunas fórmulas y reglas de derivación.</td><td></td></tr>
<tr><td>Analizar bajo qué condiciones una función es derivable.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>↓</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Mediante ejemplos propuestos, discutir los conceptos de incremento correspondiente a una función y razón de cambio promedio.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aplicando el concepto de límite, interpretar geométricamente a la razón de cambio promedio como la pendiente de la tangente en un punto, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Mediante una investigación bibliográfica distinguir entre las diferentes formas de notación utilizadas para la definición de la derivada en un punto.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Extender el concepto de derivabilidad de una función en un punto a un intervalo de su dominio.</td></tr>
</table>

En el programa de DGETI (ver tabla 4) se plantea como objetivo interpretar el *concepto de derivada* mediante las razones de cambio promedio y de las ideas de rapidez de la variación, para arribar a la rapidez de variación instantánea como un límite especial. En las actividades de aprendizaje se plantea discutir el concepto de incremento e interpretar la rapidez instantánea como la pendiente de la tangente en un punto; por último sugiere la investigación de las notaciones para derivadas y la extensión de derivada en un punto a un intervalo. En el programa del COBACH se pretende una introducción más *libre*, dado que el objetivo sugiere presentarla a través de los problemas de las velocidades instantáneas o bien por la vía de las tangentes para después obtener algunas fórmulas de derivación aplicando su definición. En el caso del programa de las preparatorias de la UAG (el aprobado en 1981) sólo se menciona que el alumno debe interpretar geométricamente la derivada. El programa homologado de Cálculo Diferencial de la CENMSUAG sugiere tratar *la derivada* en *varias formas*, como pendiente de tangentes o como razón de cambio, después recomienda el trabajo con los *cocientes de incrementos* abriendo la posibilidad de usar los infinitesimales, luego la derivada como función para después *calcular muchas derivadas*, y al final propone estudiar las aplicaciones. Nuevamente, en este último programa prevalece la inclinación de transmitir sólo contenido matemático y minimizar el papel que juegan las ideas de la variación en la formación de los conceptos del Cálculo. Además, de un programa nuevo se espera que supere a sus antecesores, sin embargo, se puede constatar que carece de fundamentación, objetivos didácticos, de orientaciones didácticas coherentes y Procedimientos de evaluación, que son los elementos básicos que configuran un auténtico currículo según se acepta actualmente por la comunidad científica.

7. LA REFORMA CURRICULAR ACTUAL

La reforma curricular para el bachillerato tecnológico dirigida por la SEP por medio del COSNET en el país está cifrado en tres documentos principales: El modelo de la educación media superior tecnológica, estructura del bachillerato tecnológico y en los programas de estudios insertos en el documento de la reforma curricular del bachillerato tecnológico. En cuanto a Matemáticas se refiere, en el último documento citado se plantea el propósito del programa de Matemáticas:

> El estudiante, a partir de la apropiación de los contenidos fundamentales de la Matemática, desarrollará habilidades de pensamiento, comunicación y descubrimiento que le permitan usarlos en la resolución de problemas

cotidianos y ser partícipe del desarrollo sustentable de su entorno. Asimismo proporcionar los elementos básicos de la materia requeridos por otras áreas del conocimiento.

Las asignaturas que se proponen a lo largo del bachillerato en los documentos de referencia tienen inconsistencias (ver la Tabla 5). En el primer documento se elimina el Cálculo, en el segundo aparece en el cuarto semestre. El primer documento está fechado en junio de 2004 y el segundo en agosto del mismo año. Había pues la pretensión explícita de eliminar esta parte de la Matemática escolar en la formación de los bachilleres con orientación hacia el área físico-matemática. De concretarse la eliminación del Cálculo, se estaría, por una parte alejando la posibilidad de una formación propedéutica que ubicara a los estudiantes en condiciones de poder acceder en mejores condiciones a una educación matemática en el nivel superior. Gran parte de la Matemática superior está basada en los elementos sustanciales del Cálculo Diferencial e Integral, quitarlo del currículo equivaldría a eliminar el puente entre la Matemática básica y la Matemática superior. Por otra parte, ese cambio curricular estaría caminando en sentido contrario a como se orientan las tendencias curriculares en el mundo.

Tabla 5. Asignaturas propuestas para el bachillerato tecnológico.

DOCUMENTO	**1º SEMESTRE**	**2º SEMESTRE**	**3º SEMESTRE**	**4º SEMESTRE**	**5º SEMESTRE**	**6º SEMESTRE**
Estructura del bachillerato tecnológico. SEP/COSNET, pp. 12-19	Álgebra	Geometría y Trigonometría	Geometría analítica	Probabilidad y Estadística I	Probabilidad y Estadística II	Taller de Matemática aplicada
Reforma curricular del bachillerato tecnológico. Programa de estudios. Matemáticas. SEP/COSNET, p. 6	Álgebra	Geometría y Trigonometría	Geometría analítica	Cálculo	Probabilidad y Estadística I	Matemática aplicada

Por otro lado, sobre los propósitos de la asignatura, respecto del Cálculo en el programa de estudios de Matemáticas ya referido se plantea: los estudiantes usarán los contenidos de las matemáticas antecedentes en la resolución de problemas que los conduzcan hacia los conceptos fundamentales de función, límite, derivada e integral que les permita construir una imagen de su entorno social, científico y tecnológico. Los contenidos con los que se pretenden lograr tales propósitos son: funciones, tipos de funciones, límites, derivada, comportamiento de la función e integral. Respecto a la derivada en específico se plantean los siguientes contenidos: interpretación geométrica de la derivada, resolución de derivadas, regla de la cadena y fórmulas de derivación. En la asignatura de Matemáticas Aplicadas que se propone sea impartida en el sexto semestre del bachillerato, área físico-matemático, se recuperan dos temas del Cálculo: aplicaciones de la derivada y aplicaciones de la integral. Los contenidos para estos temas, tal y como aparecen en el documento son, área bajo curvas y volúmenes de sólidos de revolución para el primero, y análisis de funciones y rapidez de cambio para el segundo. Aquí es evidente un error de correspondencia.

Como puede apreciarse, los contenidos curriculares en lo que al Cálculo Diferencial se refiere, no son muy distintos de los que tradicionalmente se han venido trabajando en el bachillerato, a excepción del intento de eliminarlo.

8. RELACIÓN ENTRE LOS TEXTOS Y PROGRAMAS REGIONALES

En cuanto a los antecedentes para la derivada, entre los textos usuales y lo que declaran los programas oficiales vigentes no existen diferencias significativas, salvo que en los programas se notan simplificaciones notorias en cuanto al volumen del contenido, y suelen recomendar un trabajo menos riguroso (matemáticamente hablando) con los teoremas y propiedades básicas del Cálculo. En cambio es notable que, mientras los textos sugieren una vía más numérica y algebraica en la construcción del concepto de derivada para finalmente dar su interpretación geométrica, los programas sugieren como vía la de las razones de cambio o la vía geométrica en su proceso de formación. Particularmente, mientras uno de los programas revisados sugiere introducir la derivada mediante la rapidez de la variación y las razones de cambio, para así pasar a su representación geométrica como pendiente de tangentes, en los otros se sugiere la vía geométrica o la de las velocidades instantáneas. Esto deja al descubierto la falta de correspondencia entre los textos usuales y las exigencias de los programas.

Además, en virtud de que los programas no son lo suficientemente explícitos, no parecen cumplir su función orientadora, pues los profesores muchas veces prefieren atenerse al texto o textos de su preferencia para impartir sus clases.

9. LA DERIVADA SEGÚN LOS PROGRAMAS DE OTROS PAÍSES

Para ampliar la panorámica sobre la derivada y el CD en el nivel preuniversitario, se consultaron algunos trabajos de investigación en los que se presentan análisis del currículo de matemáticas del nivel medio. La información aquí vertida proviene principalmente del *Análisis Comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica*, trabajo auspiciado por el programa IBERCIMA; del libro *National Currícula*, de Geoffrey Howson, y de los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* de la NCTM (National Council of Teacher of Mathematics).

En el primer trabajo se revisan los currículos vigentes hasta 1991 de 22 países agrupados en cuatro regiones: países del cono sur (Argentina, Brasil, Chile, Paraguay y Uruguay), países andinos (Bolivia, Colombia, Ecuador, Perú y Venezuela), países de Centroamérica, el Caribe y México (Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico y República Dominicana) y los países ibéricos (España y Portugal). Aunque en este trabajo se dejan al descubierto numerosas deficiencias que presentan los currículos analizados respecto de una concepción amplia del currículo, es posible obtener del análisis un panorama general sobre la enseñanza de la derivada en esos países. Según los analistas, predominan en los objetivos generales de sus programas aquellos que se refieren al campo de la información, al campo de las habilidades, de las estrategias generales y actitudes. Al concretarse en los objetivos específicos sólo se prioriza el aprendizaje de hechos, conceptos y procedimientos algorítmicos; también hacen notar que el nivel de aprendizaje requerido en casi todos los objetivos es el de aplicación (tanto en conceptos como procedimientos algorítmicos) principalmente en la resolución de problemas. De los 22 países, en 14 de ellos se plantea como materia de estudio el CD, sobre todo para aquellos estudiantes que van para estudios universitarios en Ciencias e Ingeniería (no se incluye en los programas de Perú, Venezuela, Costa Rica, Guatemala, Nicaragua, Puerto Rico y República Dominicana). Los temas que se incluyen en el CD son las sucesiones, límites de funciones, continuidad, concepto de derivada, reglas de derivación, puntos críticos y estudio de funciones, aunque también se estudian previamente las funciones de variable real. A pesar de que en algunos programas se señala que los criterios utilizados en la selección de los contenidos fueron la significación científica, su valor formativo o su valor instrumental, los analistas deducen que en la mayoría de los currículos, la elección de los contenidos estuvo influenciada por la propia organización lógico-deductiva de la Matemática, tal como la jerarquizó y formalizó la llamada Matemática Moderna. Aunque este trabajo no describe de manera específica cómo los programas sugieren sea tratado el concepto de derivada, se infiere que su tratamiento didáctico no es significativamente distinto del que presentan los textos y programas del bachillerato guerrerense.

En el segundo trabajo se revisan los currículos de Matemáticas de los países de la Comunidad Europea agregando los de Hungría y Japón. Según los programas de estos países, el estudio del CD es obligado para los estudiantes que se preparan para hacer estudios universitarios relacionados con las Ciencias, la Ingeniería o la Economía, siendo más amplio y profundo su tratamiento en los programas para las dos primeras orientaciones. En varios países se introducen algunas ideas intuitivas del Cálculo en el 11º grado y se amplían y profundizan en el 12º., en dependencia de la frecuencia de sesiones semanales de Matemáticas, éstas fluctúan desde 2 hasta 9. No obstante la diversidad de ofertas, los programas relacionados con los principios del Análisis Matemático de estos países, consideran invariablemente: las funciones numéricas (algebraicas y trascendentes), límites, continuidad, otros temas relacionados a funciones y el Cálculo Diferencial e Integral. En el CD incluyen el concepto de derivada, fórmulas de derivación y aplicaciones de la derivada al análisis de funciones y la obtención de máximos y mínimos. Particularmente algunas opciones del preuniversitario irlandés, japonés y holandés, sugieren introducir el concepto de derivada mediante las razones de cambio y relacionarlo con las pendientes de tangentes; en cambio, en la mayoría de los demás países la secuencia: límite, continuidad, derivada e interpretación geométrica o física, es casi inalterable. Es notable la diferencia entre el tratamiento de la derivada sugerido en el programa francés y el sugerido en el resto de los programas: en él se le trata a partir de una *función lineal afín* cuyo gráfico *mejor aproxima* a una curva en una vecindad de un punto, de modo que la derivada se define como el coeficiente del término de primer orden de la expansión de f en la vecindad de a para un h dado.

La reforma de la enseñanza de la Matemática en Estados Unidos de Norteamérica para la actual década se encuentra enmarcada en los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, documento diseñado por la Comission on Standards for School Mathematics de la NCTM y discutido por una buena parte de la comunidad de profesores de Matemáticas e investigadores de ese país. En este documento se establecen algunos criterios mínimos de calidad para la enseñanza de la Matemática como el de un currículo, de lineamientos para la evaluación y los estándares. En el currículo se detalla qué matemáticas deben conocer los alumnos y qué deben hacer los profesores para que los alumnos alcancen estos conocimientos. En los lineamientos para la evaluación se trata de medir la eficacia del currículo y la actuación de los estudiantes. Los estándares son declaraciones de principios sobre qué tiene valor y qué no lo tiene en la enseñanza de la Matemática. En los niveles 9-12 se sugiere que el currículo de Matemáticas debe incluir una exploración informal de los conceptos del Análisis Matemático para todos los estudiantes, incluso para los futuros universitarios. También se sugiere que los estudiantes tengan la oportunidad de investigar, de manera sistemática, las ideas centrales del Análisis (límite, área bajo una curva, derivada y pendientes de tangentes y razones de cambio instantáneas) de manera que contribuyan a la profundización de sus estructuras conceptuales sobre las funciones y las utilicen para representar y responder a preguntas acerca del mundo real. Se recomienda hacer énfasis en que los conocimientos del Análisis requieren de una forma distinta de pensamiento matemático que trasciende las concepciones de los *procesos finitos* hacia los *procesos infinitos*; además se sugiere que los estudiantes hagan exploraciones basadas en experiencias numéricas y geométricas y que aprovechen la tecnología de la calculadora y el ordenador. En este sentido, se recomienda que los estudiantes puedan utilizar el ordenador para resolver problemas de optimización sin necesariamente calcular derivadas, investigar continuidad, asíntotas, concavidad e incluso les permita intuir ideas analíticas, por ejemplo, que la propiedad de diferenciabilidad, que en términos gráficos está asociada a la propiedad de que las curvas posean *rectitud local.* Finalmente, se sugiere que en vez de dedicar tanto tiempo a los algoritmos debe dedicarse más tiempo y esfuerzo a la adquisición de estructuras conceptuales sobre las ideas claves del Cálculo y sus aplicaciones.

En resumen, de los programas de los 37 países analizados, en 28 de ellos (el 75,6%) se incluye el estudio del CD en el preuniversitario para estudiantes que se preparan para hacer estudios universitarios en Ciencias e Ingeniería. Aunque con diferencias poco significativas en cuanto a contenido, todos los programas incluyen como temas precedentes al CD, las sucesiones y las funciones, para después tratar los límites, la continuidad y así preparar el terreno para arribar al concepto de derivada; después se trabaja con las reglas de derivación y las aplicaciones al análisis de funciones y a la solución de problemas sobre extremos. Generalmente la estructura de los programas está influida por la estructura lógico-formal del análisis, aunque en trabajos recientes se empiezan a introducir acercamientos más intuitivos e informales, que enfocan la atención en la comprensión de las ideas básicas y sugieren utilización de la computadora como herramienta. No obstante, en la mayoría de los documentos revisados, aún se ven lejanas las introducciones didácticas que prioricen el significado físico de la derivada asociado a la rapidez de la variación.

10. UNA VISIÓN GLOBAL SOBRE LOS TEXTOS Y PROGRAMAS

El análisis realizado en las páginas precedentes ha develado la falta de correspondencia entre los textos usuales en la región y los programas de CD; los primeros proponen una forma de introducir los conceptos básicos del Cálculo y los segundos, otra distinta. En el estado de Guerrero se siguen usando con frecuencia textos editados a principios de este siglo, incluso existen programas que no han sido modificados desde 1970. Si bien es necesario reformar los planes y programas de estudio también lo es concretar esas reformas en nuevos textos que introduzcan en las aulas los aportes obtenidos en las investigaciones pedagógicas. Desde principios de la actual década, círculos importantes de investigación sugieren que la enseñanza del CD en el bachillerato debiera priorizar la comprensión de sus conceptos básicos y disminuir la cantidad de tiempo dedicado a la mera transferencia de contenidos y el aprendizaje de algoritmos.

Al igual que en los textos, los programas revisados no siguen un tratamiento del Cálculo que considere a la variación o el cambio como *eje rector* del cual se desprendan los contenidos; aunque algunos programas señalan aspectos puntuales sobre la variación éstos no logran penetrar en todo el curso. Más bien la mayor carga de trabajo se cede al tratamiento de una gran cantidad de contenido matemático para después buscarle algunas aplicaciones. Para contribuir a la comprensión de los conceptos básicos del Cálculo en el bachillerato, los nuevos programas y textos pudieran orientar su enseñanza a partir de la necesidad de resolver problemas de la práctica, principalmente los relacionados con el movimiento y la variación, de modo que de aquí se genere el contenido mínimo indispensable. En el desarrollo histórico del concepto de derivada la introducción de la Matemática del Cambio fue decisiva, pero ésta a su vez fue introducida por la necesidad de resolver los problemas generados por el desarrollo de las fuerzas productivas alcanzado en los siglos XVI y XVII.

De la solución de esos problemas surgieron las estrategias seguidas por los precursores e inventores del Cálculo empeñados en darles explicaciones racionales al movimiento de los astros, al flujo de los líquidos, al movimiento de un cuerpo impulsado, etc. De ahí nacieron las nociones de variable y función, de ahí se generó la necesidad de la cuantificación de la rapidez de la variación y el concepto de razón de cambio instantánea. Este sendero, en esencia, pudiera recuperar los programas y los textos para contribuir a la comprensión del concepto más importante del CD.

11. TENDENCIAS SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA

La orientación que se le ha dado a la enseñanza del CD en el preuniversitario ha sido fuertemente influida por la organización de los contenidos de la manera como se les estructura en el Análisis Matemático. Sin embargo, esta orientación en poco ha contribuido a la comprensión de las ideas básicas del Cálculo. Conocedores de esta problemática, varios investigadores sugieren enfoques menos formales en los que la atención no se centre en la mera transferencia de contenidos (Gil y De Guzmán 1993), sino en el desarrollo de procesos del pensamiento propios de la Matemática (resolución de problemas), en el desarrollo conceptual en forma significativa, explotando para ello las ideas intuitivas subyacentes a los conceptos y su significado práctico. La enseñanza de la derivada depende, en gran parte, de la orientación del curso de CD, en este sentido se vislumbran dos tendencias fundamentales en donde la primacía es conferida a la organización del contenido clásico como se estructura en el Análisis Matemático, para finalmente buscarle sus aplicaciones, y la otra, en la que el contenido se genera mediante la necesidad de resolver problemas prácticos, de modo que los conceptos básicos se forman a partir del problema de las tangentes o de su significado físico. Ambas tendencias suelen manifestarse mediante ciertas variantes que llamaré *enfoques*: en la primera tendencia se incluyen varios de los enfoques tradicionales y en la segunda los enfoques innovadores. En la primera tendencia son visibles el enfoque *algebraico*, el *numérico,* el *formal,* el *infinitesimalista* y el de la *aproximación afín local,* en la segunda tendencia se distinguen básicamente los enfoques *geométrico* y el *variacional*. Aunque siendo innovador el enfoque *computacional*, no necesariamente se ajusta a alguna de las tendencias anteriores, sino que está más influenciado por el uso de los medios electrónicos en la enseñanza. No obstante merece especial atención, ya que recientemente está cobrando mucho interés.

11.1 Enfoques que priorizan la estructura del contenido

El *enfoque algebraico* prioriza el trabajo con los algoritmos, principalmente con la regla de los cuatro pasos y los que se utilizan para obtener derivadas mediante fórmulas. La interpretación geométrica de la derivada en este enfoque es relegada a un segundo plano y omite su significado físico; el tratamiento de la derivada sigue la secuencia: incrementos, límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, regla general de derivación, ejercitación con la regla general y por último la interpretación geométrica. Los textos que han contribuido para que este enfoque se haya difundido y arraigado en nuestro medio son, entre otros, el Cálculo Diferencial e Integral de W. A. Granville y el de Santaló/Carbonell. Con este enfoque se ha difundido la *creencia* de que la derivada es simplemente una fórmula o una sucesión de algoritmos algebraicos carentes de significado y alejados de la realidad.

En el *enfoque numérico* es característico el uso abundante de sucesiones numéricas, particularmente en el tratamiento del límite de funciones. Esta inclinación hacia las sucesiones presupone una mejor conceptualización del límite, por lo que la derivada, siendo un límite particular, al introducirla mediante sucesiones sería más asequible a los estudiantes. En el texto de Anfossi/Flores este enfoque es fácilmente reconocible, aunque se notan inclinaciones en el Santaló/Carbonell; en estos textos son usuales las tablas de valores para mostrar el comportamiento del cociente $\Delta y/\Delta x$ a medida que Δx se hace tender a cero. Aunque las sucesiones y las aproximaciones numéricas están más cercanas a la experiencia de los estudiantes, se persiste aún en darle significado geométrico a la derivada después de haber trabajado con los contenidos clásicos. La relación entre la derivada y la variación es abordada hasta en el tema de las aplicaciones.

El lanzamiento del Sputnik por los soviéticos en 1957 tuvo gran impacto en el *mundo occidental* al grado de provocar temor al rezago científico. Estas reacciones llegaron a la educación y por tanto se inició una reforma en los planes y programas de enseñanza de la Matemática en varios países del mundo. Esta reforma estuvo fuertemente influenciada por la escuela francesa bourbaquista y se concretó con la introducción de la *Matemática Moderna* (Piaget, Choquet y otros, 1983). Estos cambios empiezan a operar principalmente en Francia, llegan a Estados Unidos de Norteamérica y dada la influencia que estos países tienen en Latinoamérica, estos cambios se aplican (sin más) en México. Sus manifestaciones más importantes consistieron en la incorporación de las estructuras matemáticas en los textos y programas escolares de Matemáticas. En este marco, la formalización matemática, conducida por el rigor lógico, penetra en la Matemática escolar de la década de los 60 y por tanto el *enfoque formal* se introduce en los cursos de CD. La estructura de estos cursos comprende como primer tema el conjunto de los números reales, el concepto de función como un caso particular de relaciones, la definición del límite en términos de ε y δ, una definición rigurosa de la continuidad por medio del límite. Una vez definidos rigurosamente todos estos conceptos se plantean los teoremas y algoritmos necesarios para llegar a la derivada y sus consecuentes fórmulas y reglas de derivación, y finalmente se proponen las aplicaciones. Estos cambios influyeron fuertemente en la enseñanza del Cálculo en general y por ende de la derivada. Los que cursaron CD guiados por el texto de W. A . Granville, pronto arribaron al concepto de derivada con un conocimiento *mínimo* de elementos precedentes, pero para los que lo cursaron guiándose en textos como el de F. Jr. Ayres, el de Taylor/Wade o con el Mazani/Patel/Patil, la derivada llegó hasta después de haber formalizado *rigurosamente* los conceptos de números reales, función, límite y continuidad. Los resultados no se hicieron esperar, detrás del formalismo matemático quedaron escondidas las ideas físicas y geométricas que generaron al concepto de derivada. Con este enfoque se exageró en darle a los contenidos del Cálculo una estructura lógica coherente en detrimento del desarrollo del significado de los conceptos. Esto provocó que los estudiantes (y maestros), al no entender los aspectos formales del Cálculo, se refugiaran nuevamente en el mero aprendizaje de algoritmos.

Inmersos en el afán de introducir acercamientos al Cálculo más asequibles a los estudiantes a principios de la década de los 60 con la publicación del libro de Robinson, *Analisis no Standard*, se rehabilitan los infinitesimales en la Matemática y se introduce el *enfoque infinitesimalista* en la enseñanza del Cálculo. Uno de los primeros intentos en Estados Unidos de Norteamérica es plasmado en Keisler (1976), Hendle & Kleinberg (1979) y en México en Cordero (1986). En términos generales, la estructura de los contenidos básicos del Cálculo en esta tendencia son organizados mediante una especie de isomorfismo respecto de los contenidos tradicionales. Primero se caracteriza el conjunto de los números hiperreales ($\Re^*$), se asume que $\Re$ (los números reales) es un campo completo y ordenado y $\Re^*$ como una extensión de $\Re$ que posee la propiedad de campo no arquimediano, los elementos de $\Re^*$ son llamados infinitesimales y se definen como:

Un número a $(a \in \Re^*)$ es infinitésimo si $|a| < r$ para todo número real r.

Por lo tanto un *infinitamente grande* (infinito) es aquel $b \in \Re^*$ tal que $|b| > r$ para todo número real r. Muchas operaciones sobre límites y derivadas que en el Análisis Standard resultan altamente laboriosas, mediante los infinitesimales se facilitan considerablemente. En virtud de que con este enfoque es posible definir a las curvas monótonas como si estuvieran formadas por *segmentos infinitesimales*, resultan *plausibles* las representaciones geométricas de los *triángulos característicos* de Leibniz, de los cuales se desprende que la derivada es el cociente de los diferenciales *dy* y *dx*. Varios profesores e investigadores están en favor de introducir los infinitesimales en la escuela, por su simplicidad, los conceptos del Cálculo pueden ser más asequibles a los estudiantes, incluso algunos trabajos de investigación reportan alcances significativos con este enfoque. Aprovechando la simplicidad de las ideas infinitesimalistas en la formación de los conceptos mediante los problemas de la variación, pueden crearse las condiciones que propicien la comprensión del concepto de derivada.

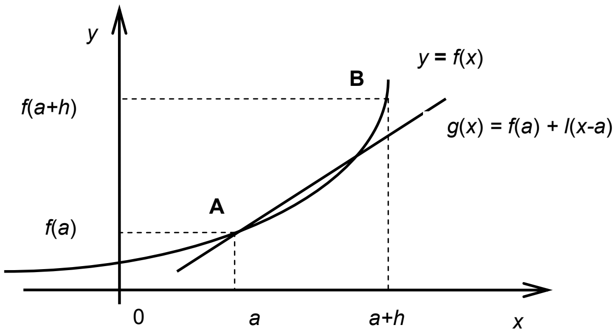
La derivada como una *aproximación afín local* es una variante a la sugerida por E. Levi (1960) y es actualmente utilizada en la secundaria francesa (M. Artigue, 1991, G. Howson, 1991, Antibi *et al,* 1991). En Antibi *et al* (1991, pp. 139-147), para introducir el concepto de derivada se parte de la idea de *coeficiente direccional* (pendiente) de la recta para definir la pendiente de la secante. Estas definiciones sirven de base para introducir los conceptos de velocidad media y de velocidad instantánea. Hechas estas consideraciones se introduce la idea de tangente como el límite de una sucesión de secantes y con ello se establece la noción de aproximación afín. Ésta se auxilia de una función afín de la forma:

$$g(x) = f(a) + l(x - a)$$

de modo que la aproximación afín $d(x)=f(x) - g(x)$. De esta expresión se obtiene el *grado de aproximación* entre la curva f y la tangente $g(x)$ en una vecindad de $x = a$. Esta idea es introducida con el objeto de caracterizar a la tangente g(x) como *la mejor aproximación afín local* en una vecindad de a de la curva f. La definición de derivada se presenta en los siguientes términos:

> Sea f una función definida en el intervalo I y $a \in I$. Decir que el número real l es la derivada de f en a significa que la primera o la segunda de las condiciones siguientes se cumplen:
>
> 1. La función $h \to \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tiene por límite l si h tiende a 0.
> 2. Para todo número real h suficientemente próximo a 0,

$f(a+h) = f(a) + lh + h\varphi(h)$, donde la función φ tiene por límite 0 cuando h tiende a 0.



Este enfoque (innovador dentro de los de su tipo) considera que la tangente g(x) es la mejor aproximación lineal de la función f en la vecindad de a, de manera que l, la derivada, es el factor de proporcionalidad entre la diferencia $g(x) - g(a)$ y $x–a$. La idea de la recta como mejor aproximación local de una curva es valiosa desde el punto de vista geométrico; sin embargo, la derivada presentada como un factor de proporcionalidad es muy abstracta y no deja explícito el significado de la derivada asociado a la rapidez de la variación.

11.2 Los enfoques innovadores

Un enfoque didáctico inverso a todos los anteriores es el *enfoque geométrico* y su principal exponente es el libro de Cruse/Lehman publicado en USA en 1970. En este texto se parte de la necesidad de resolver problemas de optimización en los que los recursos del Álgebra resultan insuficientes. En la solución de estos problemas aflora la necesidad de calcular pendientes de tangentes en un punto, después sigue una línea casi histórica de la formación del concepto de derivada mediante este problema. Primero la estudia por medio de los métodos griegos de la antigüedad clásica, luego por el método algebraico de las Raíces Iguales de Descartes, finalmente con el Método de los Límites de Fermat. Con este último, de hecho se arriba al concepto de derivada (aunque a estas alturas los autores aún no utilizan este término) creando así un método general para calcular pendientes de tangentes; también se da solución a los problemas de optimización planteados inicialmente y algunas reglas y fórmulas para predecir pendientes de tangentes. El tratamiento explícito de las variables, funciones, las razones instantáneas de cambio y la continuidad son tratados después. Este texto rompe con las barreras del formalismo matemático prevaleciente en los enfoques anteriores privilegiando ahora el aspecto utilitarista del Cálculo. Una de las ventajas de este enfoque radica en que prioriza el significado y la utilidad práctica que la derivada tiene en la resolución de problemas, sin embargo algunas experiencias de los profesores (incluso la nuestra), han mostrado que seguir el desarrollo casi histórico del concepto de la derivada consume mucho más tiempo del destinado para el curso de CD. Hay evidencias empíricas que muestran las grandes dificultades de los estudiantes para entender que el límite de una familia de secantes es la pendiente de la tangente (Sierpinska, 1985; Orton, 1977), además con este acercamiento no queda explícita la conexión entre la tangente geométrica que es un fenómeno estático y la derivada como concepto dinámico que cuantifica la rapidez con que varía una variable respecto de otra en un instante.

En México el *enfoque variacional* es sugerido por los grupos de trabajo que dirige el doctor Ricardo Cantoral y por el grupo que dirigía la doctora Elfride Wenzelburger. Cantoral (1991) propone rediseñar el discurso matemático escolar desde el fondo, cambiando el papel principal que los cursos de cálculo confieren al concepto de *límite* y poniendo en su lugar a la *variación física,* de tal manera que no se sugiere tratar tan exhaustivamente las funciones, sino más bien las cantidades y las magnitudes, en este sentido se expresa:

> ...en el terreno de la enseñanza, tendemos hacia la reconstrucción de una Didáctica del Cálculo basada más en las intuiciones y vivencias cotidianas de los sujetos, mediante acercamientos fenomenológicos, por lo que se atiende más al fenómeno en su relación con el concepto matemático que al concepto *per se*.

Este enfoque considera como núcleo organizador del discurso la idea de *predicción* para conocer las cantidades por medio de las variaciones y en el plano analítico se le confiere a la Serie de Taylor el papel central, pues se asume que la noción de predicción en los fenómenos de flujo continuo de la naturaleza se ubicó como la base de significación primaria. En algunas experiencias con este enfoque, Campero y Cantoral (1991) reportan reducciones considerables de los índices de reprobación con estudiantes de licenciatura y un ascenso creciente en el aprovechamiento según los resultados de exámenes parciales de un curso de cálculo. En el segundo caso, la propuesta para la enseñanza del CD está plasmada en una publicación reciente de la doctora Wenzelburger titulada *Cálculo Diferencial, una guía para maestros y alumnos* dirigida al nivel preuniversitario. En esta propuesta se sugiere presentar las ideas fundamentales en forma significativa con un empleo mínimo del formalismo matemático, se pretende que en el CD se desarrollen métodos matemáticos para cuantificar, describir y pronosticar cambios, por lo que se asume a la razón de cambio como su concepto fundamental. Al concretar estas ideas, se parte de las razones de cambio promedio obtenidas del estudio de fenómenos de la vida diaria y se arriba a la derivada como razón de cambio instantánea por medio de un manejo intuitivo del límite. Estas dos variantes constituyen la línea de investigación en la enseñanza del CD de las cuales se nutre nuestra propuesta.

A partir de la consideración de las dimensiones intuitivas y visuales de la Matemática, algunos investigadores utilizan la microcomputadora y la calculadora como herramientas en la enseñanza de los conceptos del Cálculo (Tall, 1986; Balderas, 1992; Galindo, 1993; Chávez y Hitt, 1993). De hecho existe una línea de investigación que explota las posibilidades que estos medios brindan en la enseñanza de la Matemática, de aquí ha emergido el *enfoque computacional* en la enseñanza del Cálculo. Los ordenadores han hecho realidad la posibilidad de la *visualización dinámica* del comportamiento gráfico de las funciones, de observar mediante simulaciones iterativas cómo la sucesión de secantes tiende a la tangente, de visualizar la disminución iterativa de los triángulos característicos en la presentación geométrica de la derivada, de ayudar a la visualización de la *rectitud local* de las curvas por medio de magnificaciones sucesivas, de *observar* curvas continuas en todas partes pero derivables en ningún punto, de racionalizar considerablemente el trabajo con los métodos numéricos, etc. Se ha difundido en el país software para la enseñanza del CD por medio de microcomputadoras, e incluso a nivel experimental se han diseñado programas para calculadoras que logran acercamientos intuitivos al límite y la derivada; varios investigadores han reportado éxitos importantes en la enseñanza del CD utilizando estos medios, sin embargo este tipo de acercamientos tiene el inconveniente de ser costoso y, por tanto, tiene pocas posibilidades de convertirse en recurso de uso masivo en nuestro medio.

12. DESPUÉS DE ESTA MIRADA A LA ENSEÑANZA DE LA DERIVADA Y EL CÁLCULO, ¿QUÉ SIGUE?

Esta revisión a los textos y programas nos ha permitido tener una visión más cercana de la enseñanza de la derivada y del Cálculo en general; particularmente, de lo que sucede al respecto en el nivel medio superior. Mediante esta visión se consigue darle alcance al principal objetivo de este artículo, sin embargo como profesor de Matemáticas uno siempre se pregunta: si así están las cosas, ¿que podríamos hacer para cambiarlas? Ésta ha sido una de las preguntas centrales que ocupa tanto a profesores como a investigadores interesados en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas; en nuestro caso, del nivel preuniversitario. A este respecto he pensado en elaborar una alternativa que pudiera hacer frente a la situación antes descrita en este documento. ¿Hacia dónde se dirige esa alternativa? Antes de inclinarse por cualquier enfoque es necesario asumir el marco general en el que se circunscribe y para ello también es necesario contestarse la interrogante ¿para qué enseñar Cálculo y, por tanto, el concepto de derivada?

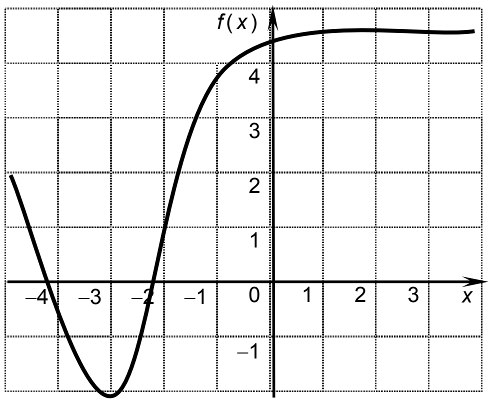
Las respuestas a estas preguntas, a su vez, dependen de las posiciones que se adopten sobre cuestiones más generales del estilo ¿por qué enseñar Matemática? Campistrous y Rizo (1993) analizan cuatro posibles respuestas: porque es necesaria para la vida, porque es necesaria para la ciencia y la técnica, porque desarrolla el pensamiento lógico y porque es parte inalienable de la cultura. Desde el punto vista oficial, el Cálculo en el bachillerato cumple una función propedéutica, es decir, se enseña a los adolescentes para prepararlos para estudios universitarios de cierta especialización, y en los estudios universitarios se espera puedan aplicarlo en las Ciencias, en la Ingeniería o en la Economía, función y propósito que sin dejar de ser apropiados, en las condiciones en que se da la enseñanza son muy difíciles de alcanzar. Si uno de los objetivos principales de la enseñanza del Cálculo tiene que ver con su carácter utilitario, entonces no tiene sentido enfatizar tanto sobre sus estructuras abstractas como se concibe en el enfoque formal. Tampoco contribuye al logro de este objetivo el enfoque algebraico en el que se exagera la atención dedicada al dominio de los algoritmos, e incluso poco se puede hacer con cualquier enfoque que priorice la mera transferencia de contenidos. Además del carácter utilitario (entendido en su relación con la resolución de problemas de aplicación), desde nuestro punto de vista, la enseñanza del CD debiera plantearse como objetivo primario la comprensión de sus conceptos básicos a partir del desarrollo de las ideas de la variación, para contribuir al logro de este propósito pudiera seguirse lo esencial de su génesis histórica. Mediante acercamientos intuitivos a partir de sus aplicaciones en los problemas de la variación, la comprensión del concepto de derivada puede verse favorecida.

Nuestra propuesta alternativa se ha concretado en Dolores (1999) y se apoya en el enfoque variacional, y de él se adoptan las siguientes ideas: elaborar introducciones intuitivas e informales al CD que no necesariamente se sujeten a la estructura lógico-formal del Análisis Matemático, que desarrollen ideas variacionales que posibiliten la comprensión de sus conceptos fundamentales; ubicar como *eje rector* de todo el curso de CD al estudio de la variación, de modo que la derivada no sea un concepto matemático abstracto sino un concepto desarrollado para cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. Bajo estas premisas, no se construye la estructura matemática del Cálculo para después buscarle aplicaciones como lo hacen los textos tradicionales y lo sugieren los programas, sino por el contrario, se genera el conocimiento en contextos prácticos o de aplicación, de modo que la derivada en particular se forma mediante su significado variacional. Siguiendo estas líneas generales en su tratamiento didáctico es posible propiciar condiciones para que los estudiantes comprendan este concepto.

13. ACTIVIDADES QUE PUEDEN INCLUIRSE EN LA ALTERNATIVA

La derivada está estrechamente relacionada con la cuantificación de los cambios y el comportamiento de éstos. No son sólo algoritmos y operaciones algebraicas. Su naturaleza física está asociada con la determinación de la rapidez o la velocidad, la rapidez es el cociente entre las magnitudes de distancia y tiempo. En términos generales, es el cociente entre las magnitudes de los cambios, pero no de cualquier cambio sino de cambios infinitamente pequeños. Para lograr un acercamiento variacional a este importante concepto el lector puede reflexionar y realizar las actividades que a continuación se plantean.

13.1. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la función f(x). Analícela cuidadosamente y contéstese lo siguiente.



a) *¿Cuánto cambia* f *si* x *cambia de –5 a –4?*

b) *¿Cuánto cambia* f *si* x *cambia de –3 a –2?*

c) *¿Cuánto cambia* f *si* x *cambia de 1 a 2?*

d) *Suponga que* x *cambia de izquierda a derecha, es decir* $\Delta x > 0$*. ¿Para qué* x *se cumplen las desigualdades siguientes?*

$f(x + \Delta x) - f(x) > 0$

$f(x + \Delta x) - f(x) < 0$

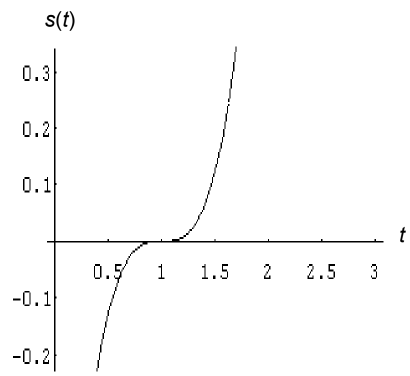
$f(x + \Delta x) - f(x) = 0.$

13.2. Considere el punto P de coordenadas (3, 4) que se encuentra ubicado en el primer cuadrante del plano cartesiano. Trace por este punto rectas que formen triángulos rectángulos con los ejes de coordenadas positivos. Supóngase que los ejes están graduados en cm. ¿Cómo crece o decrece el área de los triángulos para incrementos de la base de 1 cm? ¿Cómo se comportan los cambios de los cambios de área?

13.3. Sea la función: f(x) = x3, definida para todos los números reales. ¿Para qué x, $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$? ¿Dónde $f(x + \Delta x) - f(x) > 0$? ¿En qué intervalos se cumple que $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$? ¿Qué significado variacional tienen estos cálculos?

13.4. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y la distancia s que recorre en un tiempo t está dada por s(t) = 20t – 4.9t2 ¿Con qué rapidez asciende el cuerpo desde el momento en que se lanza hasta 0.5 seg. después? ¿Cuál es la rapidez con que desciende en el último ½ de segundo en que está en el aire?

13.5. Un objeto se mueve de acuerdo con la fórmula s(t) = t3 – 3t2 + 3t – 1 (s en metros y t en segundos). Observe la gráfica siguiente.



Obténgase la rapidez media con que se mueve el objeto a intervalos de 0,25 seg. Partir de t = 0,5 seg. Analice cómo cambia la rapidez media.

¿Dónde crece con mayor rapidez?

¿Dónde decrece?
¿Dónde su crecimiento es casi cero?

13.6. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba, desde la superficie terrestre, alcanza una altura s determinada por la fórmula: s(t)=160t–16t2. Calcúlese su velocidad exactamente en t=5 seg utilizando aproximaciones numéricas.

	ACERCAMIENTO POR LA IZQUIERDA					**ACERCAMIENTO POR LA DERECHA**			
$t_f \leq t \leq t_i$				…➔	?	🡐…			
Δt				…➔	?	🡐…			
Δs				…➔	?	🡐…			
$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$				…➔	?	🡐…			

13.7. Acerca del significado del cálculo realizado en la actividad anterior. La velocidad en t0=5 se obtiene:

a) Sólo mediante acercamientos numéricos sucesivos a $t_0 = 5$.

b) Por medio del cálculo del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

c) Por medio de la búsqueda del *límite* del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando Δs=0.

d) Obteniendo el *límite* del cociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ cuando Δt es *infinitamente pequeño.*

13.8. ¿Cuál es el significado de la expresión $\Delta t \to 0$? Analice y discuta las siguientes opciones.

a) $\Delta t = 0$

b) $\Delta t \approx 0$

c) Δt es *infinitamente pequeño*

d) Δt decrece sin límite

13.9. Si Δt es cambio que experimenta la variable t, en una función s(t). ¿Qué significado físico, geométrico o variacional tienen las expresiones siguientes:

a) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

b) $\frac{ds}{dt}$

c) $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

d) $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

13.10. ¿Qué significado tiene la expresión $\Delta t \to 0$? :

a) $\Delta t = 0$

b) $\Delta t \approx 0$

c) Δt es infinitamente pequeño

d) Δt decrece sin límite

e) $\Delta t = 000 \ldots 1$

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1991). Análisis; del libro *Advanced Mathematical Thinking.* David Tall, Editor. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

Balderas, E. (1992). Aprendizaje de conceptos del cálculo mediante la graficación en computadora. *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa,* (Vol. 2 pp), Cuernavaca Mor., México: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Campero J., Cantoral R. (1991). Acerca del rediseño del Discurso Matemático Escolar. Una experiencia didáctica en el Cálculo de varias Variables con estudiantes de humanidades, *Memorias de la Quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Tegucigalpa, Honduras.

Campistrous L., Rizo C. (1993). La enseñanza de las matemáticas, reflexiones problémicas; *Memorias de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. Universidad de Panamá, Pan.

Cantoral, R. (1991). Proyecto de investigación: formación de la noción de función analítica. *Mathesis* Vol. 7, Núm. 2, pp. 223-239. Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

Colectivo de autores de la Facultad Matemáticas del ISPEJV, (1995). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática.* Tomo 1. Editado por la Universidad Autónoma de Sinaloa, Sinaloa Méx.

Comission on Standards for School Mathematics de la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (1991). *Estándares curriculares y de Evaluación para la educación matemáticas*. Traducción de Alvarez, F. J. y Casado, R. J., edición en castellano de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática “Thales”, Sevilla, España.

Cordero, F. (1986). *Un modelo infinitesimal para la enseñanza del cálculo*. Tesis de maestría, Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN, México D. F.

Chávez, H., Hitt, F. (1993). Estructuras, modelos y procesos cognoscitivos sobre la visualización en la enseñanza del Cálculo Diferencial usando la microcomputadora. *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* celebrado en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez Chihuahua. pp. 111-139. Edición de Filloy/Herrera/Hitt, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN, México D. F.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D. F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Galindo, E. (1993). Conjeturas y pruebas, el uso de las gráficas en la enseñanza de la Matemática. *Memorias del IV Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* celebrado en la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, Chihuahua, Edición de

Filloy/Herrera/Hitt, Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV del IPN, México D. F., pp. 1-18.

Gil, D., De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias Innovadoras*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid, España: Editorial Popular S.A.

Hendle, J.M., Kleinberg E.M. (1979). *Infinitesimal calculus*. Mit Press.

Howson, G. (1991). *National Curricula in Mathematics*. The Mathematical Association, University of Southampton, England.

IBERCIMA (1992). *Análisis comparado del Currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica,* Mare Mostrum, Madrid, España: Ediciones Didácticas S.A.

Imaz, C. González, J., Salcido, A., (1984). *Calculus an infinitesimal model for teaching*. The UMAP Journal , Vol. V.

Jungk, W. (1985). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 2, Primera Parte*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Keisler, J. (1976). *Elementary Calculus*. Prindle, Weber and Schmidt. Boston, USA.

Kline, M. (1976). *Calculus an intuitive and phisical approach*. John Wiley & Sons, Inc., USA: Segunda edición, New York.

Levi, E. (1960). El análisis algebraico de Lagrange y la enseñanza del cálculo a los principiantes. *Revista Matemática de la Sociedad Matemática Mexicana* núm. VIII, pp. 28-53, México D. F.

Piaget, J., Chouquet, G., Dieudonné, J, Thom, R. y otros (1983). *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid, España. Alianza Universidad.

Tall, D. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. *Actes de la 4iéme École de Été de Didactique des Mathématiques et de l´informatique*. Orléans, Rapport de recherché, IMAG Grenoble, 238-264.

Wenzelburger, E. (1993). *Cálculo Diferencial. Una guía para maestros y alumnos*. Grupo Méx. D. F.: Editorial Iberoamérica.

TEXTOS Y PROGRAMAS REVISADOS

Anfossi, A., Flores Meyer, M. A. (1990). *Cálculo Diferencial e Integral* (para preparatoria). México D. F. Editorial Progreso S. A. Novena Edición.

Antibi, A., Barra, R., Malaval, J., Pensec, J., Tricoire, A. (1991). *Mathematiques, 1^res^ se* Tome 1. Programme 1991, París Francia: Editions Nathan.

Ayres, F. Jr (1986). *Teoría y Problemas de Cálculo Diferencial e Integral*. Serie de Compendios Schaum, México D. F: McGraw-Hill.

Cruce, A. & Lehman M. (1983). *Lecciones de Cálculo 1*, Introducción a la derivada. México D. F.: Fondo Educativo Interamericano.

Granville, W.A. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*, México D. F: Editorial Limusa, Cuarta reimpresión.

Madani, Patel, Patil (1968). *Cálculo Diferencial e Integral*. México D. F: Publicaciones Cultural S. A.

Santaló, S.M. y Carbonell, Ch.V. (1982). *Cálculo Diferencial e Integral*, México D. F: Joaquín Porrúa, S. A. de C. V., decimoprimera edición.

Taylor, H. & Wade, T. (1981). *Cálculo Diferencial e Integral*. México D. F: Editorial Limusa, decimoctava reimpresión, 1981.

Coordinación de Educación Media Superior, (1981). *Anteproyecto de Programa V* (Cálculo Diferencial. UAG, Chilpancingo Guerrero.

Dirección General del Colegio de Bachilleres del Estado de Guerrero Secretaría Académica (1989), *Programa de la Asignatura: Cálculo Diferencial e Integral I.* Departamento de Servicios Académicos, Chilpancingo, Guerrero, Agosto de 1989.

Programa de la Asignatura Matemáticas IV (Cálculo Diferencial) para el Quinto Semestre, Agosto de 1977 para las Escuelas Preparatorias de la UAG.

Programa Homologado de Cálculo Diferencial, junio de 1994, Coordinación de Educación Media Superior, Comisión Ejecutiva del Nivel Medio Superior de la UAG.

UAG, Dirección de Asuntos Académicos, Comisión Ejecutiva del Nivel Medio Superior (2000). *Programas de Estudio Área Físico-Matemática.* EXPOS Editores, Chilpancingo Guerrero, México.

Programas Maestros del tronco común del Bachillerato Tecnológico 1988, SEP, DEGTI, SEIT, COSNET, Coordinación Estatal Guerrero.

Programa para la Modernización Educativa 1990-1994, Estado de Guerrero, Tomo I y II, Gobierno del Estado Libre y Soberano de Guerrero, Chilpancingo Guerrero. 26 de septiembre de 1991.

COSNET, (2004). *Modelo de la Educación Superior Tecnológica*. México D. F. Editores e Impresores FOC, Primera Edición.

COSNET, (2004). *Estructura del bachillerato tecnológico*. México D. F. Editores e Impresores FOC, Primera Edición.

COSNET, (2004). *Reforma Curricular del bachillerato tecnológico. Programa de estudios.* Subsecretaría de Educación e investigación Tecnológica. SEP. México D. F. Primera Edición.