

Muestras de diversas páginas del libro

# **Control automático de procesos industriales**

**Con prácticas de simulación y análisis  
por ordenador PC**

Nota: En la mayoría de las páginas no hay continuidad  
con la página anterior ni con la siguiente

[www.alfredoroca.com/libro.htm](http://www.alfredoroca.com/libro.htm)

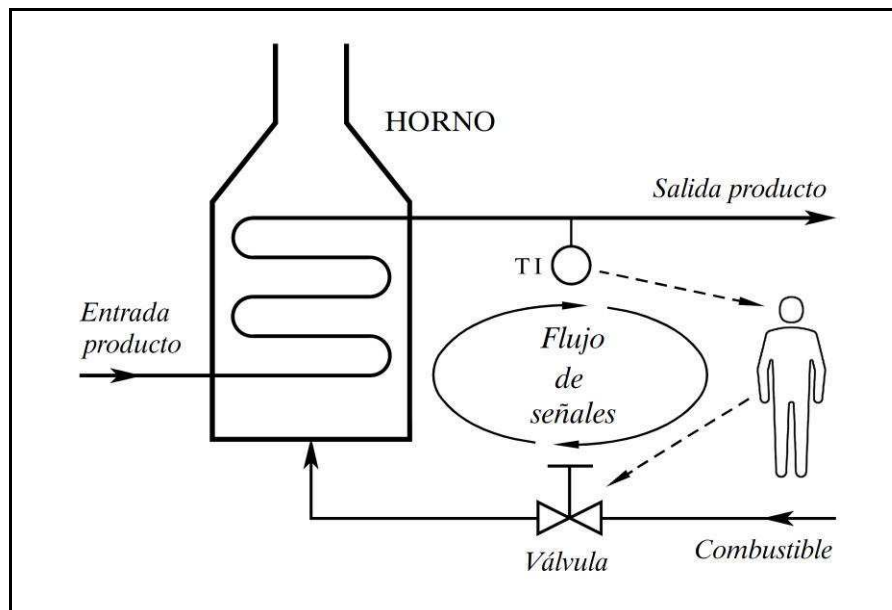
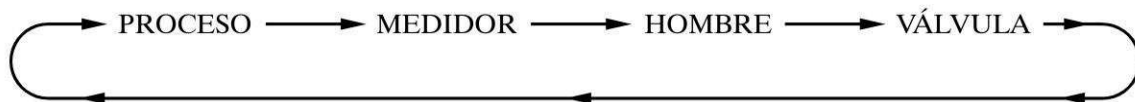


Fig. 1.2 Control manual en lazo cerrado

Vemos que el flujo de información que se efectúa en el control de este proceso, circula cerrándose sobre sí mismo a través del ser humano, siguiendo la secuencia cerrada siguiente:



sin que pueda decirse cuál de estos componentes está en primer lugar. Forman un anillo o *control en lazo cerrado*, sin principio ni fin.

## 1.7 Control automático en lazo cerrado

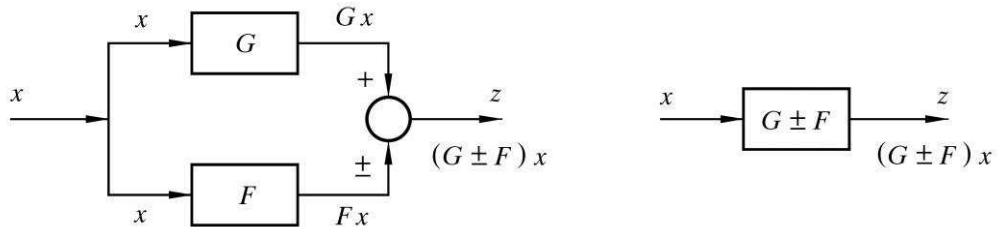
El modo de regulación manual descrito en el apartado anterior tiene, como es obvio, numerosos inconvenientes. El principal es que precisa la atención permanente humana, lo que hace que sea costoso. Otros inconvenientes, en general, derivados del ya citado, son que es lento, inseguro y poco preciso. Es de destacar el riesgo que pueda comportar una eventual distracción humana, por ejemplo, por fatiga.

La *regulación o control automático en lazo cerrado* consiste en sustituir la acción del elemento humano por un dispositivo llamado *controlador o regulador*, el cual gobierna el *elemento final de regulación*, normalmente una *válvula de control*, a efectos de corregir la *variable manipulada* de entrada al proceso.

El conjunto que forman los componentes que llevarán a cabo el control automático de un proceso se llama *sistema de control automático*.

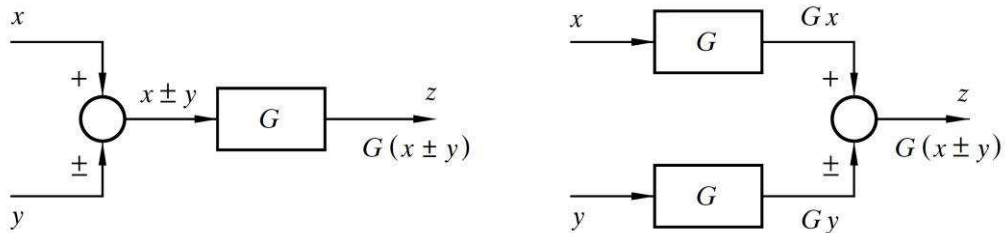
b) Bloques en paralelo. Su equivalente será un bloque con una transmitancia igual a la suma de transmitancias.

$$z = Gx \pm Fx = (G \pm F)x$$



c) Desplazamiento de un punto de suma detrás de un bloque.

$$z = (x \pm y)G = Gx \pm Gy$$

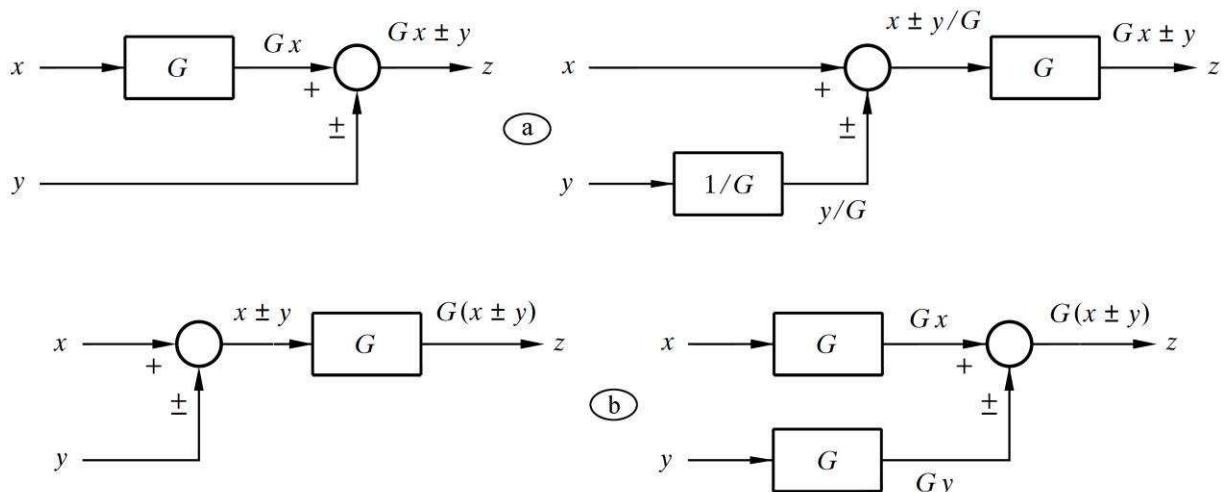


d) (a) Desplazamiento de un bloque detrás de un punto de suma.

$$z = Gx \pm y ; \quad (x \pm y/G)G = Gx \pm y$$

(b) Desplazamiento de un bloque delante de un punto de suma.

$$z = G(x \pm y) ; \quad Gx \pm Gy = G(x \pm y)$$

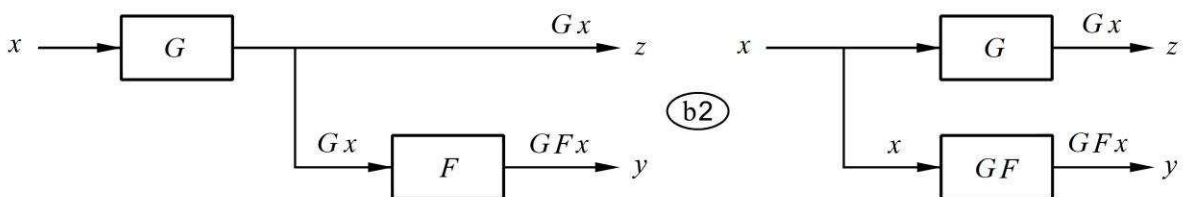
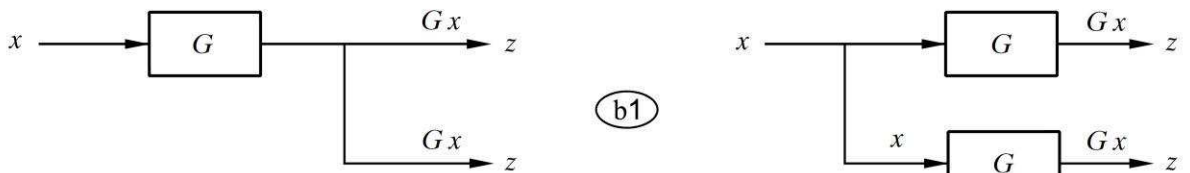
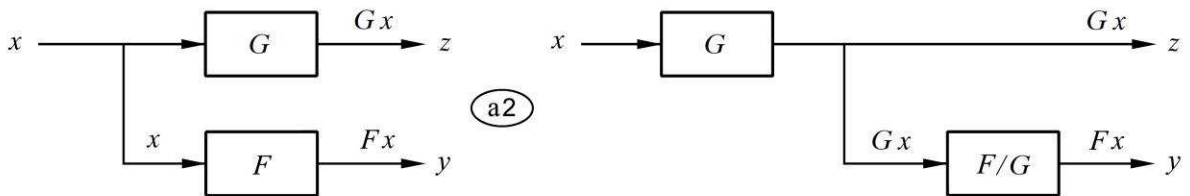
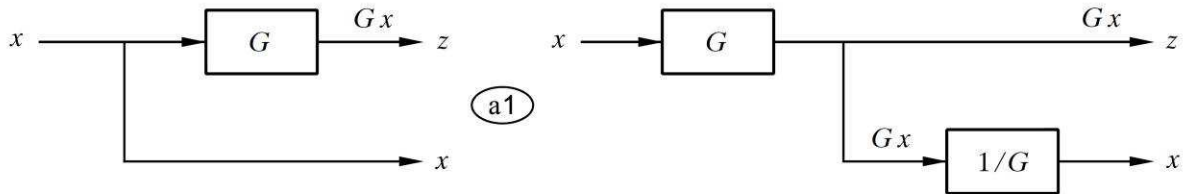


e) (a1/a2) Desplazamiento de un punto de derivación detrás de un bloque.

$$z = Gx ; \quad Gx(1/G) = x ; \quad y = Fx ; \quad Gx(F/G) = y$$

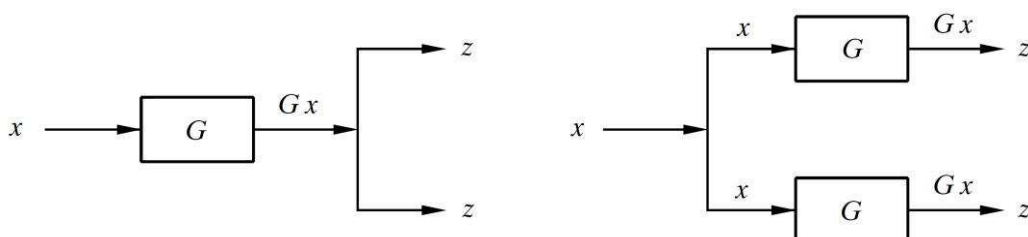
(b1/b2) Desplazamiento de un punto de derivación delante de un bloque.

$$z = Gx ; \quad y = GFx$$



f) Desplazamiento de un bloque detrás de un punto de derivación.

$$z = Gx$$



En la figura 3.3 se representa el componente *inertancia* en la versión eléctrica *inductancia*, y sus correspondientes diagramas de bloques, así como las relaciones entre las variables corriente y tensión. Se ha detallado la variable intermedia *flujo magnético*  $\Phi$  (carga inercial), como integración de la diferencia de potencial  $V(s)$ , en un bloque  $[1/s]$ , o como efecto de la intensidad  $I(s)$  en un bloque  $[L]$ .

El lector evitará la confusión que pueden causar los símbolos  $\Phi$  y  $\theta$ , utilizados para el flujo magnético de una autoinducción, y para el flujo en términos genéricos, cuando se describía el parámetro inertancia. En una resistencia eléctrica (resistor) el flujo correspondería a la intensidad de corriente. El flujo magnético de una autoinducción se corresponde con la carga inercial en la descripción genérica de inertancia.

### 3.4 Analogías

Dos componentes o sistemas serán *análogos* si están descritos por ecuaciones de equilibrio con la misma forma matemática; es decir, por expresiones idénticas en las que solamente cambian los nombres o símbolos de los parámetros y de las variables.

Veamos unos ejemplos, agrupados según los cuatro tipos de parámetros, en donde se ha incluido la función temporal y su transformada.

| Resistencia o conductancia  |  |  |
|---|--|--|
| Fricción viscosa  | Resistor   | Resorte  |
| $v(t) = \frac{1}{B} f(t)$   | $i(t) = \frac{1}{R} v(t)$                                    | $d(t) = \frac{1}{K} f(t)$  |
| $V(s) = \frac{1}{B} F(s)$   | $I(s) = \frac{1}{R} V(s)$                                    | $D(s) = \frac{1}{K} F(s)$  |
| $B$ = Coef. fricc. viscosa<br>$v, V$ = Velocidad<br>$f, F$ = Fuerza | $R$ = Resistencia<br>$i, I$ = Intensidad<br>$v, V$ = Tensión | $K$ = Constante elástica<br>$d, D$ = Desplazamiento<br>$f, F$ = Fuerza |

| Capacidad  |  |  |
|--|--|--|
| Nivel en tanque  | Condensador  | Autoinducción  |
| $n(t) = \frac{1}{A} \int q dt$   | $v(t) = \frac{1}{C} \int i dt$                             | $i(t) = \frac{1}{L} \int v dt$                               |
| $N(s) = \frac{1}{As} Q(s)$   | $V(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$                                 | $I(s) = \frac{1}{Ls} V(s)$                                   |
| $A$ = Área del tanque<br>$n, N$ = Nivel<br>$q, Q$ = Caudal aporte neto | $C$ = Capacidad<br>$v, V$ = Tensión<br>$i, I$ = Intensidad | $L$ = Inductancia<br>$i, I$ = Intensidad<br>$v, V$ = Tensión |

| <b>Inertancia</b>  |   |   |
|--|---|---|
| <b>Masa</b>  | <b>Autoinducción</b>  | <b>Condensador</b>  |
| $f(t) = M \frac{dv}{dt}$   | $v(t) = L \frac{di}{dt}$  | $i(t) = C \frac{dv}{dt}$  |
| $F(s) = M s V(s)$  | $V(s) = L s I(s)$   | $I(s) = C s V(s)$   |
| $M = \text{Masa}$<br>$f, F = \text{Fuerza}$<br>$v, V = \text{Velocidad}$ | $L = \text{Inductancia}$<br>$v, V = \text{Tensión}$<br>$i, I = \text{Intensidad}$ | $C = \text{Capacidad}$<br>$i, I = \text{Intensidad}$<br>$v, V = \text{Tensión}$ |

No debería sorprender hallar incluido en el grupo de parámetros del tipo capacidad una autoinducción, o que en el tipo inertancia se encuentre un condensador. Es la función matemática la que clasifica el componente, porque ésta define su comportamiento, que es justamente lo que se está tipificando. Obsérvese que un mismo componente responde según una ecuación de distinta forma, dependiendo de qué variables se consideren como de entrada y de salida.

Veamos como los elementos *fricción viscosa*, *resorte*, *masa*, *autoinducción* y *condensador* pueden pertenecer a cada uno de los cuatro tipos de parámetros, sin más que asignar diferentes variables de entrada y salida.

| <b>ELEMENTO</b>                        |  |   |  |  |   |
|--|--|---|--|--|---|
| <b>Parámetro ↓</b>                     | Fricc. viscosa   | Resorte   | Masa   | Autoinduc.   | Condensador   |
| Resistencia                            | $v = \frac{1}{B} f$  | $x = \frac{1}{K} f$   | $a = \frac{1}{M} f$  | $i = \frac{1}{L} \Phi$   | $v = \frac{1}{C} q$   |
| Conductancia                           | $f = B v$  | $f = K x$   | $f = M a$  | $\Phi = L i$   | $q = C v$   |
| Capacidad                              | $x = \frac{1}{B} \int f dt$  | $f = K \int v dt$   | $v = \frac{1}{M} \int f dt$  | $i = \frac{1}{L} \int v dt$  | $v = \frac{1}{C} \int i dt$   |
| Inertancia                             | $f = B \frac{dx}{dt}$  | $v = \frac{1}{K} \frac{df}{dt}$   | $f = M \frac{dv}{dt}$  | $v = L \frac{di}{dt}$  | $i = C \frac{dv}{dt}$   |
| <i>Parámetro:</i><br><i>Variables:</i> | $B = \text{Coef. fricc.}$<br>$v = \text{Velocidad}$<br>$f = \text{Fuerza}$<br>$x = \text{Recorrido}$ | $K = \text{Const. elást.}$<br>$x = \text{Recorrido}$<br>$f = \text{Fuerza}$<br>$v = \text{Velocidad}$ | $M = \text{Masa}$<br>$a = \text{Aceleración}$<br>$f = \text{Fuerza}$<br>$v = \text{Velocidad}$ | $L = \text{Inductancia}$<br>$i = \text{Intensidad}$<br>$\Phi = \text{Flujo magn.}$<br>$v = \text{Tensión}$ | $C = \text{Capacidad}$<br>$v = \text{Tensión}$<br>$q = \text{Carga}$<br>$i = \text{Intensidad}$ |

Así pues, llamando  $x$  a la entrada del componente o bloque, e  $y$  a la salida del mismo, tendremos, para resumir, la siguiente tabla de expresiones para cada tipo de componente, en la que se han omitido las notaciones  $(t)$  y  $(s)$ .

| Parámetro    |       | Ecuación de equilibrio      |                       | Transmitancia<br>$G = Y/X$ |
|--------------|-------|-----------------------------|-----------------------|----------------------------|
| Tipo         | Valor | Temporal                    | Laplaciana            |                            |
| Resistencia  | $R$   | $y = R x$                   | $Y = R X$             | $G = R$                    |
| Conductancia | $1/R$ | $y = \frac{1}{R} x$         | $Y = \frac{1}{R} X$   | $G = \frac{1}{R}$          |
| Capacidad    | $C$   | $y = \frac{1}{C} \int x dt$ | $Y = \frac{1}{C s} X$ | $G = \frac{1}{C s}$        |
| Inertancia   | $L$   | $y = L \frac{dx}{dt}$       | $Y = L s X$           | $G = L s$                  |

A continuación se presenta una tabla de analogías de variables y parámetros, entre distintos sistemas físicos y tecnológicos.

|                    | SISTEMA                |                          |                          |                        |              |                 |
|--------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|--------------|-----------------|
|                    | Eléctrico<br>(Voltaje) | Eléctrico<br>(Corriente) | Mecánico<br>(Traslación) | Mecánico<br>(Rotación) | Fluidos      | Térmico         |
| <b>Potencial</b>   | Tensión                | Intensidad               | Fuerza                   | Par (torsión)          | Presión      | Temperatura     |
| <b>Flujo</b>       | Intensidad             | Tensión                  | Velocidad                | Velocid. ang.          | Caudal       | Flujo caloríf.  |
| <b>Carga</b>       | Carga eléct.           | Flujo magnét.            | Desplazamto.             | Ángulo                 | Cantidad     | Cant. calor     |
| <b>Resistencia</b> | Resistencia            | Conductanc.              | Coef. fric. visc.        | Coef. fric. visc.      | Resistencia  | Resistencia     |
| <b>Conductanc.</b> | Conductanc.            | Resistencia              | Inverso " "              | Inverso " "            | Inverso "    | Conductanc.     |
| <b>Capacidad</b>   | Capacidad              | Inductancia              | Const. elástica          | Cte. elást. rot.       | Volum., área | Capac. caloríf. |
| <b>Inertancia</b>  | Inductancia            | Capacidad                | Masa                     | Mom. inercia           | Inercia      | (No tiene)      |

Quizás en este capítulo habría que dedicar unas pocas líneas a las *constantes*. En honor a su grandeza hay que mencionarlas: el número  $\pi$  ( $\pi$ ) y el número  $e$  lideran, sin duda, los fundamentos de las Matemáticas; pero le siguen una miríada de constantes universales, de gran importancia, utilizadas por diversas ciencias y por la tecnología. Lo demás... son variables o parámetros.

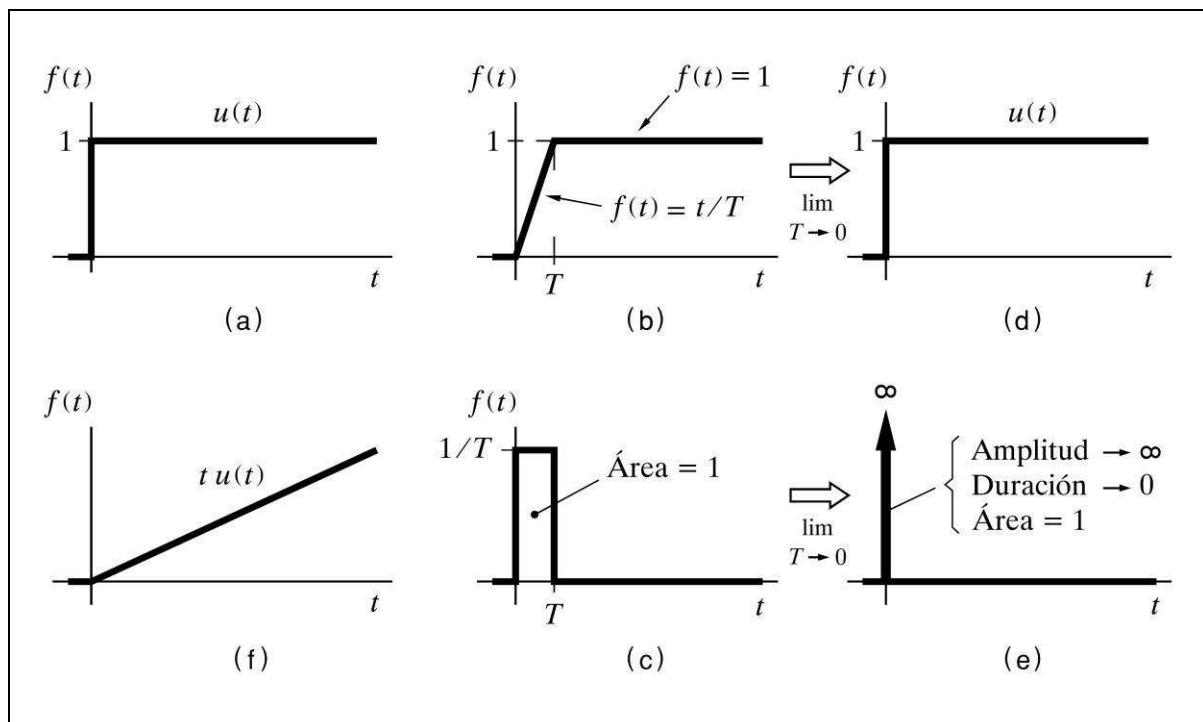


Fig. 4.1 Funciones elementales de excitación

Debe notarse que para  $t=0$ , el valor de la función es indefinido, debido a que se tiene una discontinuidad. En este tipo de funciones, se utiliza la expresión  $f(0+)$ , para indicar que se toma el valor de la función en  $t=0$ , pero evaluada en el lado positivo del tiempo, es decir, para el tiempo tendiendo a cero desde  $t > 0$ . Lo mismo puede decirse de la expresión  $f(0-)$ , pero referido al lado negativo del tiempo. De este modo, cabe añadir dos evaluaciones adicionales de la función escalón unitario, que al refundirlas con las que teníamos inicialmente queda:

- Para  $t < 0$ :  $u(t) = 0$
- Para  $t < 0, t \rightarrow 0$ :  $u(0-) = 0$
- Para  $t > 0, t \rightarrow 0$ :  $u(0+) = 1$
- Para  $t > 0$ :  $u(t) = 1$

Prácticamente, y a título de ejemplo, consideramos que se produce un escalón, cuando cerramos un interruptor que conecta una fuente de tensión continua constante a una resistencia pura. Tanto la tensión en bornas de la misma, como la intensidad, sufrirán un salto o escalón de una magnitud acorde con la tensión de la fuente y con el valor de la resistencia. Así, llamando  $V$  a la tensión,  $i(t)$  a la intensidad, y  $R$  a la resistencia, se tendría

$$i(t) = Iu(t)$$

donde  $I = V/R$  sería la magnitud del escalón de intensidad.



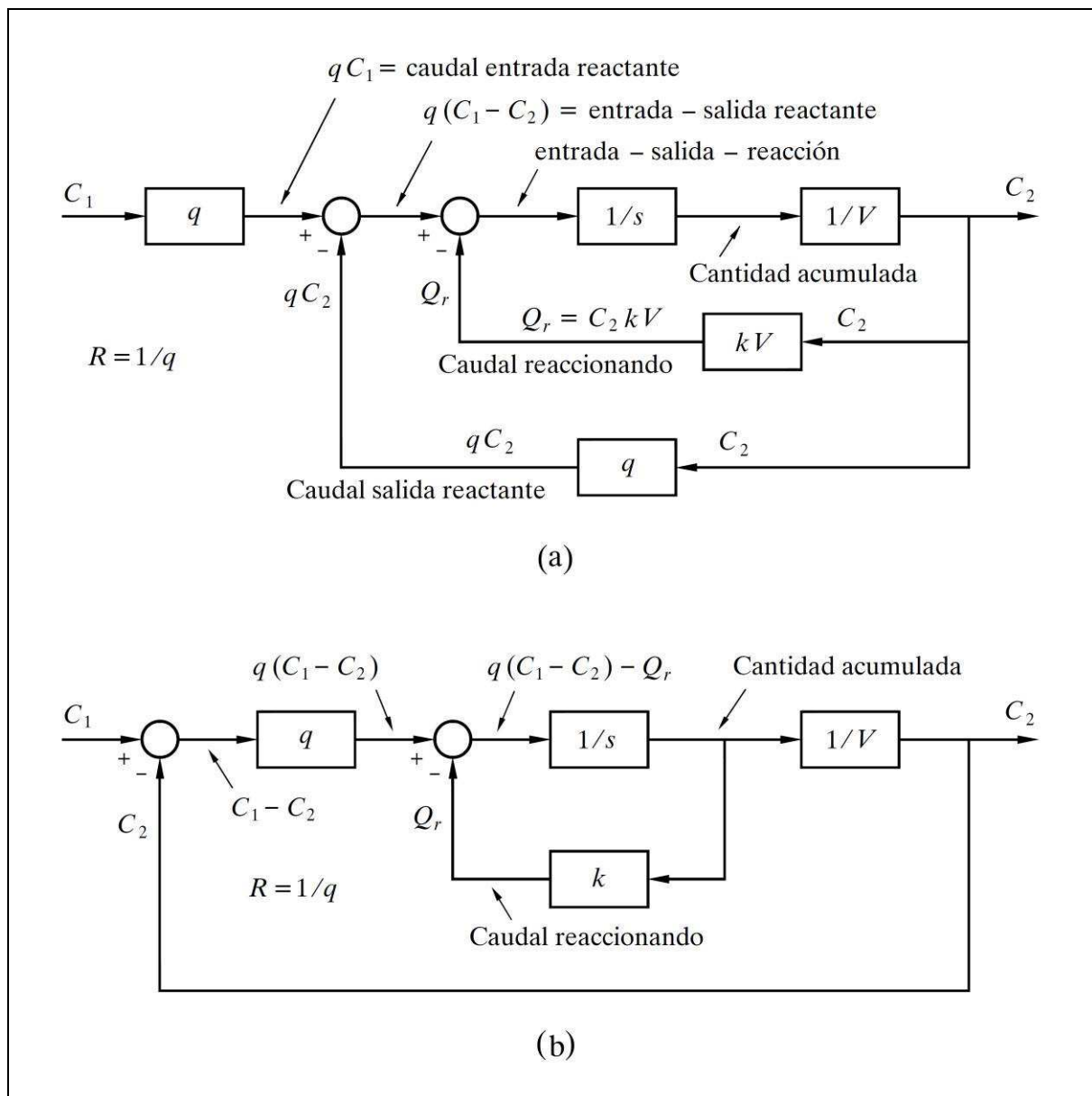


Fig. 4.9 Diagrama de bloques para una reacción de primer orden

Hay una importante diferencia con relación al caso visto anteriormente de la concentración en tanque agitado, y consiste en que ahora, cuando el sistema se encuentre en equilibrio, la concentración de salida nunca será igual a la concentración de entrada, debido precisamente al fenómeno de la reacción.

Efectuando las debidas operaciones, se obtiene la transmitancia

$$G = \frac{C_2}{C_1} = \frac{K}{Ts + 1}$$

en donde la constante de tiempo  $T$  vale

$$q_m = k \sqrt{h_m + h_0 - h_s} ; \quad k = \frac{q_m}{\sqrt{h_m + h_0 - h_s}}$$

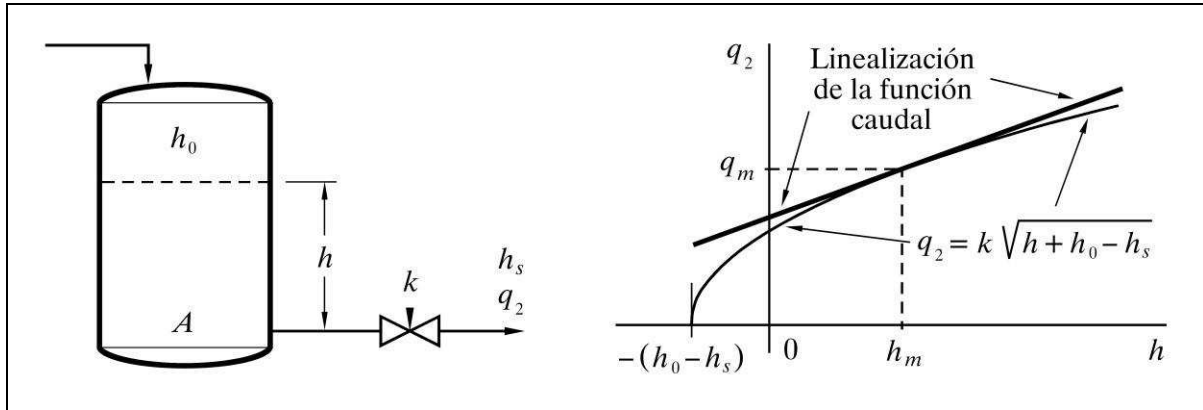


Fig. 4.12 Nivel en tanque presurizado y con restricción de descarga constante

y efectuando los mismos cálculos hechos para el caso particular anterior, la ganancia y la constante de tiempo resultarían ser

$$K = \frac{1}{m} = \frac{2 \sqrt{h_m + h_0 - h_s}}{k} = \frac{2 (h_m + h_0 - h_s)}{q_m}$$

$$T = A \frac{1}{m} = 2 A \frac{h_m + h_0 - h_s}{q_m}$$

También aquí operaríamos con las desviaciones del valor estimado como medio, tal como se ilustró en la figura 4.11.

#### 4.2.5.g) Recipiente con gas a presión provisto de una restricción. Linealización de funciones de sistemas con gases a presión

Los sistemas que manejan gases a presión presentan similitudes con los de nivel, en tanto que las funciones de caudal no son lineales con la presión o diferencia de presiones a través de una restricción. Es por ello que será preciso linealizar las ecuaciones de caudal de descarga de gases, tal como se hizo en el estudio de niveles.

Sin embargo, el problema se complica ligeramente porque las descargas gaseosas pueden presentarse de tres maneras diferentes: flujo laminar, flujo turbulento y descarga sónica (derrame o caudal crítico). Desestimaremos el flujo laminar, el cual presentaría una función lineal (proporcionalidad) con la presión diferencial.

El problema puede simplificarse razonablemente, haciendo las siguientes consideraciones:

- Expresaremos las presiones en términos de presión absoluta y las cantidades o caudales en volumen normal (referido a condiciones normales, 1 atm, 0°C).
- Definimos como *resistencia R* de una restricción al coeficiente o relación

$$d(p_1 - p_2)/dq$$

donde  $p_1$  y  $p_2$  son las presiones aguas arriba y aguas abajo de la restricción, y  $q$  es el caudal. Es decir, la relación entre la variación de presión diferencial y la variación del caudal.

- Es evidente que, desde el momento en que para definir un parámetro se toma la derivada en un punto de la curva, se está linealizando la ecuación que la define. Por tanto, habrá que tener en cuenta que nos estaremos refiriendo a cambios o desviaciones de las variables en torno a un punto, que definiremos como “punto medio”, preferentemente el valor “normal” de trabajo, esto es:

$$R = \frac{\text{variación de la presión diferencial}}{\text{variación de caudal}}$$

- Definimos como *capacidad C* de un recipiente, a la relación  $dM/dp$  entre el *cambio de la cantidad* almacenada de gas por unidad de *cambio de presión*. También en este caso nos estamos refiriendo a desviaciones de las variables y supondremos, para simplificar, que las temperaturas se mantienen constantes:

$$C = \frac{\text{variación de la cantidad de gas contenido}}{\text{variación de la presión en el recipiente}}$$

- Planteado de este modo, la capacidad  $C$ , para el gas a presión atmosférica y temperatura ambiente, coincide con el volumen  $V$  del tanque, ya que, por definición, la cantidad de un gas, al ser expresada en condiciones normales, coincidirá con el volumen ocupado; pero ello también es cierto, cualquiera que sea la presión, si asumimos gases perfectos. Cada incremento en una unidad de presión, aumenta el contenido en una cantidad que se expresaría por  $V$ .
- Generalizando, si la temperatura absoluta de trabajo es  $T$ , la capacidad vendrá expresada como

$$C = V \frac{273}{T}$$

En rigor, la constante 273 debería ser exactamente 273,15, que es el valor de la temperatura absoluta (K) correspondiente a 0°C. La unidad de temperatura absoluta en el Sistema Internacional de Unidades (SI) es el *kelvin* (no el *grado kelvin*), cuyo símbolo es K (no °K). El punto triple del agua se encuentra en 273,16 K (0,01°C).

Para *flujo turbulento* tenemos que la ecuación del caudal es

$$q = k \sqrt{p_1 - p_2}$$

de donde

$$p_1 = \frac{q^2}{k^2} + p_2 ; \quad \frac{dp_1}{dq} = \frac{2q}{k^2}$$

pero en la condición definida como media ( $q = q_m$ ,  $p_1 = p_{1m}$ )

$$k^2 = \frac{q_m^2}{p_{1m} - p_2}$$

luego

$$R = \frac{dp_1}{dq} = \frac{2(p_{1m} - p_2)}{q_m}$$

y, por tanto, la *constante de tiempo* para flujo turbulento será

$$T = RC = \frac{2V(p_{1m} - p_2)}{q_m}$$

Cuando, en un gas, la presión aguas arriba de una restricción es mayor que dos veces, aproximadamente, la de aguas abajo, sabemos que se produce el denominado *caudal crítico* o *descarga sónica* o *derrame crítico*, en donde el caudal no depende ya de la presión aguas abajo, sino que es directamente proporcional a la presión aguas arriba. Ahora, la ecuación del caudal es una función lineal con dicha presión.

En estas condiciones, definimos la *resistencia* como

$$R = \frac{p_1}{q}$$

y, por tanto, la *constante de tiempo* para caudal crítico será

$$T = RC = \frac{Vp_1}{q}$$

Así pues, en cada caso tomaremos la constante de tiempo que corresponda, y cuando, debido a las variaciones en la presión, se prevean condiciones mixtas, se calculará un valor promedio estimado, entendiéndose por ello el valor considerado como normal de trabajo.

$$\frac{Q_2}{Q} = \frac{1}{Ts + 1}$$

en las que deberíamos calcular los valores  $R$  y  $T$ , según lo indicado anteriormente, y de acuerdo con las condiciones específicas del problema.

#### 4.2.5.h) Recipiente con gas a presión con dos restricciones

La figura 4.14 muestra el croquis de un recipiente de capacidad  $C$ , al que fluyen los caudales  $q_1$  y  $q_2$  a través de las restricciones  $R_1$  y  $R_2$ , por causa de las presiones  $p_1$  y  $p_2$ . La presión en el recipiente será  $p$ , y los caudales serán entrantes o salientes según la diferencia relativa entre las presiones. Como variable de entrada pueden asimilarse tanto  $p_1$  como  $p_2$ . Asignaremos a la presión  $p$ , en el recipiente, como variable de salida. El dibujo contiene también los diagramas de bloques, detallado y reducido, mostrando cómo la presión  $p$  depende de las presiones de entrada. Consideraremos caudales positivos aquellos que entran en el depósito y como negativos los que salen.

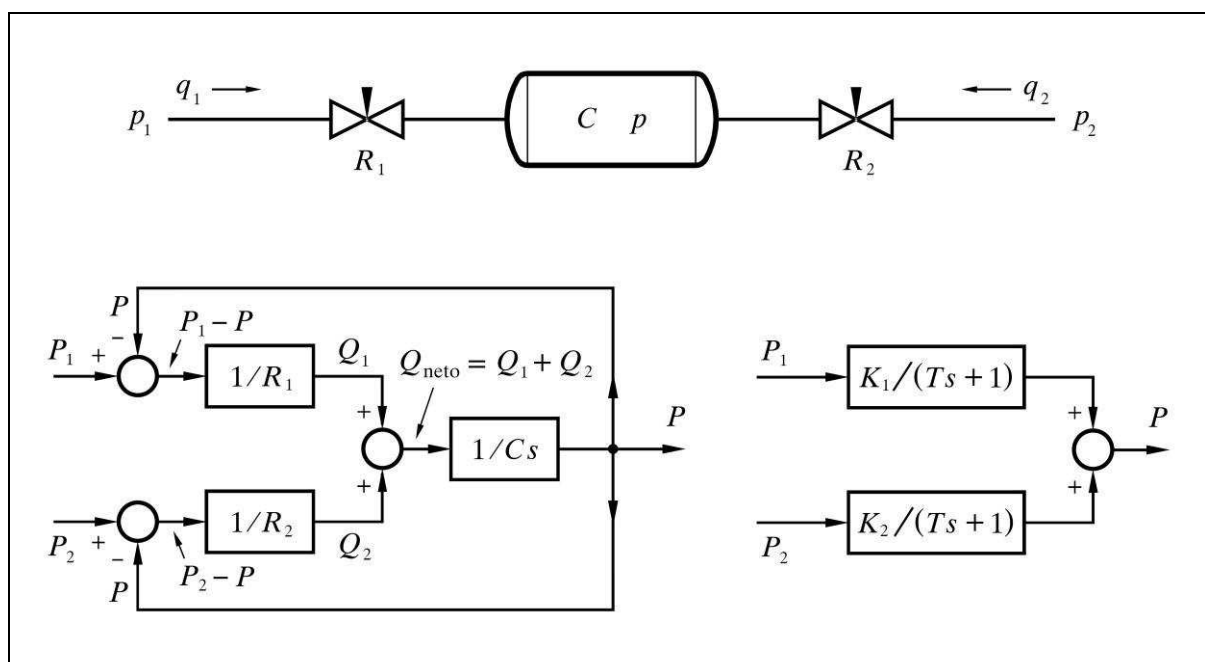


Fig. 4.14 Recipiente a presión con dos restricciones

La ecuación de balance de caudales de gas (balance másico) será

$$\text{acumulación} = \Sigma \text{caudales} = q_1 + q_2$$

Si asumimos que

Sin embargo, la existencia de válvulas con este tipo de característica se debe a la necesidad de instalarlas en circuitos con resistencias en serie (por ejemplo intercambiadores, tuberías con accesorios, etc.), en donde a medida que va abriendo la válvula y por tanto va aumentando el caudal, se produce como consecuencia un incremento en la caída de presión en el resto del circuito (con posible disminución de la presión de la bomba), con lo que la presión diferencial disponible en la válvula va disminuyendo. Esto se traduce en lo que se llama *característica efectiva* de caudal, que es la función que nos da el caudal real en el circuito con relación a la señal de mando a la válvula (posición); en contraposición con la *característica inherente*, que se refiere a la válvula sometida a una presión diferencial constante. El efecto de las resistencias en serie hace que la característica efectiva de una válvula isoporcentual tienda a linealizarse. Por ello, existe la posibilidad de considerar como un solo bloque, en cuanto a ganancia estática, el conjunto formado por la válvula y el resto del circuito, tratándolo como lineal. Cuando la válvula dispone de una presión diferencial más o menos constante, lo más idóneo es que sea del tipo de característica lineal, en cuyo caso es fácil definir la transmitancia.

La *acción* de una válvula será *directa* o *inversa*, según que un aumento de la señal de mando (carrera de la válvula) produzca un aumento o una disminución de su apertura, respectivamente. Se trata de una cuestión de diseño mecánico. No obstante, la acción puede invertirse mediante el uso de un posicionador.

#### 4.2.7.d) Bomba centrífuga

Es sin duda el tipo de bomba hidráulica más usada en la industria. Se denomina *curva característica* a la relación entre la presión que genera y el caudal que impulsa (realmente se refiere a la presión diferencial o elevación de presión). Esta curva se caracteriza por mostrar la máxima presión para caudal nulo, y va decreciendo a medida que aumenta el caudal.

Si consideramos que puede ser movida por un motor de velocidad ajustable, como es el caso de una turbina de vapor, se tendrá una curva característica diferente para cada velocidad de motor. La curva se desplazará en el sentido de mayor caudal y presión cuanto mayor sea la velocidad de giro (revoluciones por minuto).

La figura 4.21 muestra un ejemplo de curvas características de una bomba, para diferentes velocidades de giro ( $n_1 < n_2 < n_3$ ) como parámetro.

Habitualmente, las presiones se representan en términos de *altura de columna de líquido*, lo que independiza el trazado de las curvas de la densidad del fluido que manejan, puesto que la presión generada es proporcional a dicha densidad (la potencia teórica necesaria aumenta igualmente en la misma proporción).

Vemos, pues, que, considerada una bomba como un bloque generador de presión incorporado en un sistema, puede tener dos entradas:

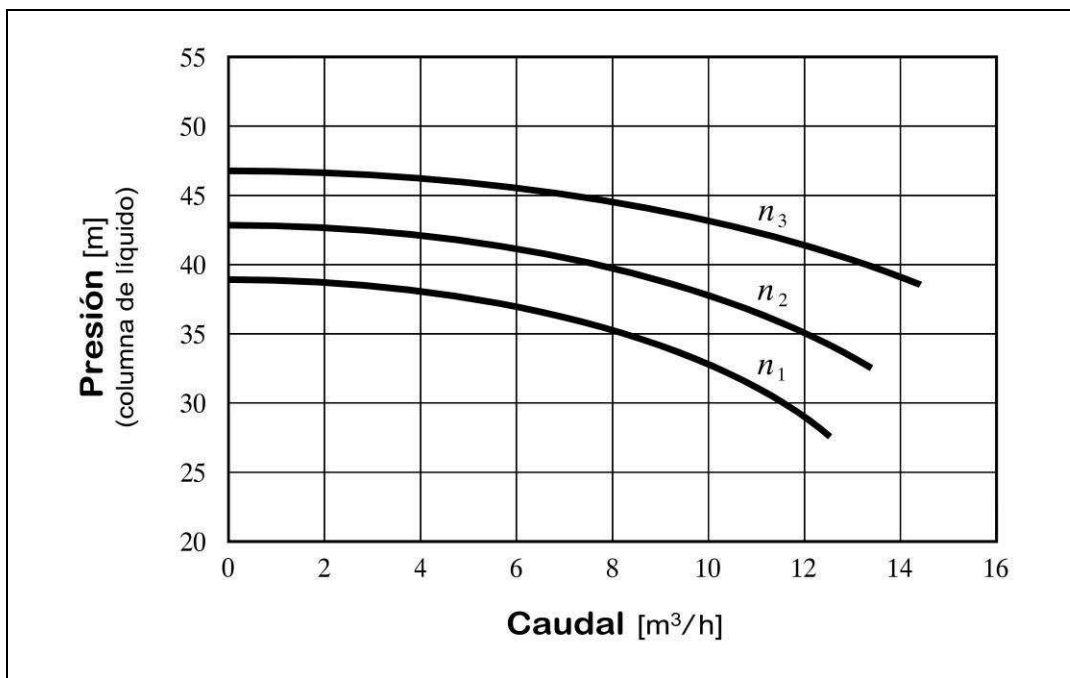


Fig. 4.21 Curvas características de una bomba centrífuga para distintas velocidades de giro

- a) *El caudal.* Si bien es cierto que es la presión generada la que ocasionará dicho caudal, ello no impide que por medio de una realimentación podamos considerar este caudal como variable de entrada, que, a su vez, determinará la presión. Tiene que existir un punto de trabajo en equilibrio que satisfaga la curva característica para ambas variables, ya que, por ejemplo, un aumento fortuito de caudal provocaría, según dicha curva, una disminución de presión que se traduciría en una reducción del caudal, contrarrestando el supuesto aumento. Es un proceso con autorregulación.
- b) *La velocidad.* Entendiendo como tal la velocidad de giro, expresada usualmente en términos de revoluciones por minuto (r.p.m.). En este caso, la variable o señal de entrada procedería de algún dispositivo controlador del propio sistema (por ejemplo una turbina) o de una señal de mando manual.

En la figura 4.22 representamos separadamente las dos funciones. En (a) hemos supuesto que la velocidad  $n$  es constante y, por tanto, la curva podría ser la réplica de una de las curvas paramétricas dibujadas en la figura 4.21. En (b) se ha supuesto que el caudal  $q$  es constante, y entonces la curva puede dibujarse deduciéndola, por puntos, de la citada figura 4.21, siempre que para ello haya suficientes curvas paramétricas representadas (o interpolando entre ellas).

En ambos casos se trata de funciones no lineales y que, una vez más, habrá que linealizar, a efectos de incorporarlas en un diagrama de bloques. Las respectivas

pendientes de las rectas se deducirán de las gráficas, normalmente facilitadas por el fabricante de la bomba.

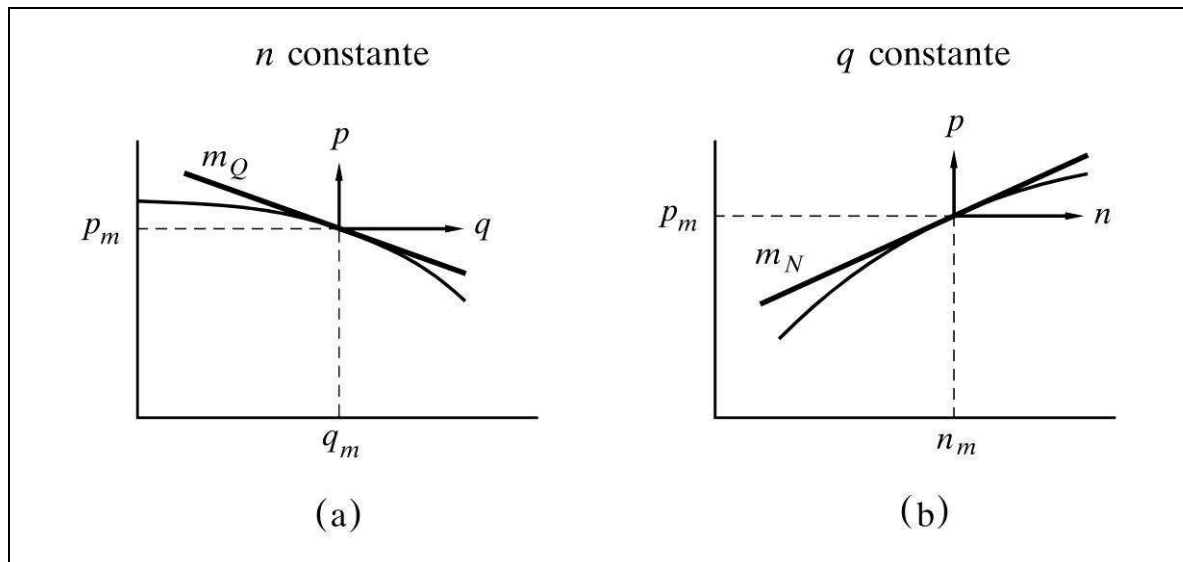


Fig. 4.22 Linealización de las curvas características de una bomba centrífuga

Recordemos, otra vez, que estaremos trabajando con variables que significarán las desviaciones de los valores medios establecidos como de operación normal.

Llamaremos  $p_m$ ,  $q_m$  y  $n_m$  a los valores medios de las variables, y  $m_Q$  y  $m_N$  a las pendientes de las rectas tangentes a las curvas en aquellos valores.

Entonces tendremos la función de la presión como una superposición de los efectos debidos a los cambios de caudal (a velocidad constante) y a los cambios de velocidad (a caudal constante). Nótese que, estrictamente hablando, estamos aplicando el concepto de derivadas parciales, pero que al no disponer explícitamente de la función, no resulta posible hacerlo por esta vía. La función será:

$$p = m_Q q + m_N n$$

o en notación laplaciana

$$P = m_Q Q + m_N N$$

De aquí puede dibujarse el diagrama de bloques correspondiente (fig. 4.23).

Habrá que recordar que una de las dos entradas será considerada como señal, mientras que la otra será una perturbación o una realimentación interna. Asimismo, téngase presente que el valor del coeficiente  $m_Q$  es negativo.



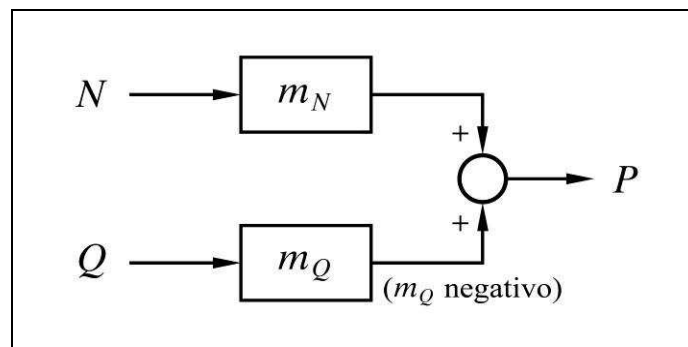


Fig. 4.23 Diagrama de bloques de una bomba centrífuga

Aprovecharemos para representar un diagrama de bloques parcial, de un supuesto proceso en el que se controla la velocidad de la bomba, la cual impulsa el fluido a través de un elemento resistencia  $R$ . Se tendrá, por tanto, como variable de entrada la velocidad  $N$ , y como variable de salida se representará tanto la presión  $P$  como el caudal  $Q$  (fig. 4.24).

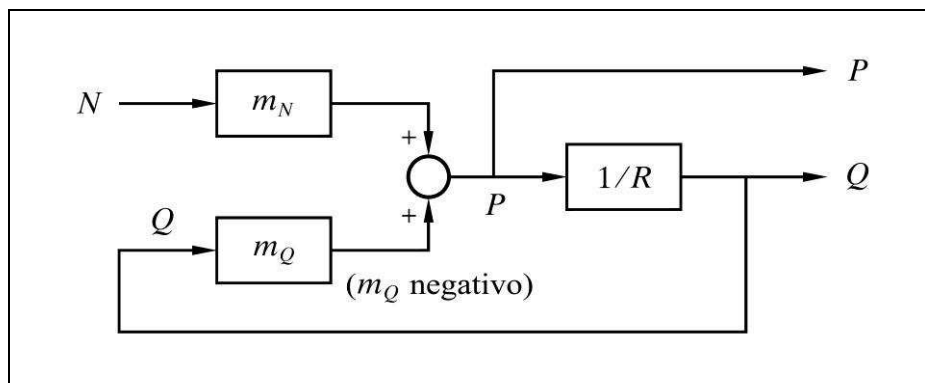


Fig. 4.24  
Diagrama de bloques para una bomba centrífuga, controlada por velocidad y descargando sobre una resistencia  $R$

Vamos a deducir en este ejemplo la función de transferencia entre la velocidad y la presión o el caudal.

En la figura 4.25 redibujamos el diagrama de bloques para tal fin, cambiando de signo el bloque  $[m_Q]$  a efectos de dejar un lazo de realimentación negativa.

Aplicando las reglas *a)* y *l)* del Álgebra de bloques que, recordemos, son

$$\frac{Z}{X} = GF \quad \text{y} \quad \frac{Z}{X} = \frac{G}{GH + 1}$$

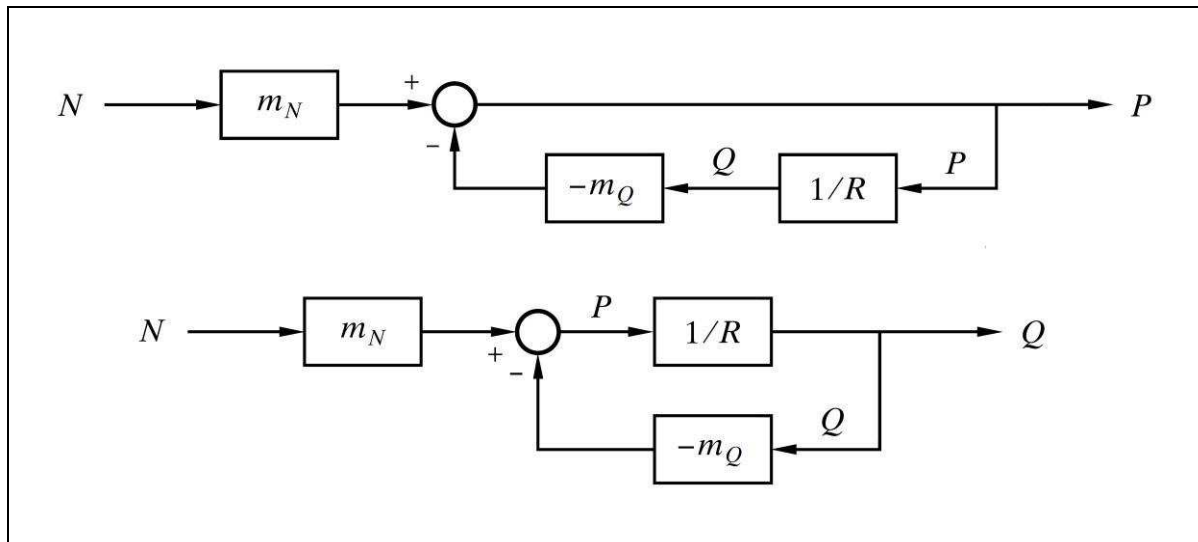


Fig. 4.25 Diagramas de bloques para velocidad como variable de entrada, y presión o caudal como variables de salida

obtenemos las dos funciones de transferencia:

- Para la *presión*

$$\frac{P}{N} = \frac{m_N R}{-m_Q + R}; \quad P = \frac{m_N R}{-m_Q + R} N$$

- Para el *caudal*

$$\frac{Q}{N} = \frac{m_N}{-m_Q + R}; \quad Q = \frac{m_N}{-m_Q + R} N$$

Según se ha visto,  $m_Q$  refleja una pendiente de naturaleza negativa, por lo que en estas ecuaciones el término  $(-m_Q)$  será positivo. Por otra parte,  $m_N$  y  $m_Q$  son de un valor constante (punto de operación normal) y  $R$  es un parámetro constante. Esto prueba que un aumento de la velocidad ( $N$ ) producirá un aumento tanto de presión como de caudal, lo que puede observarse gráficamente en la figura 4.21 (pág. 98).

Si la presión de aspiración de la bomba,  $P_a$ , o la presión final,  $P_f$ , donde descarga la resistencia, no son constantes, debemos introducir estas variables en el diagrama de bloques, quedando entonces según la figura 4.26. La presión de impulsión o descarga  $P$ , se ve entonces incrementada por la presión de aspiración  $P_a$ , y la diferencia de presión disponible en la resistencia se ve disminuida por la presión final  $P_f$ . Ambas presiones pueden ser consideradas como perturbaciones al sistema, en tanto no dependan del caudal.

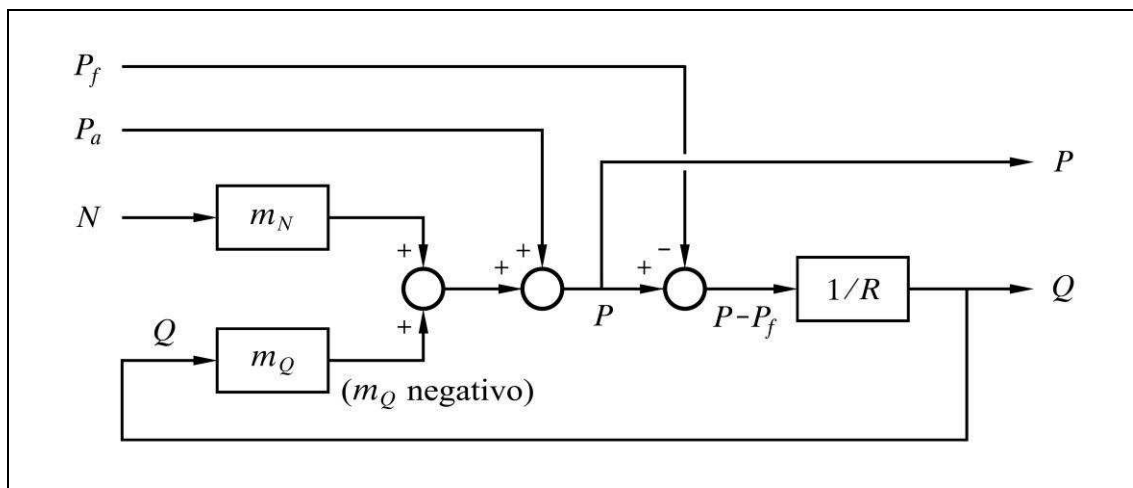


Fig. 4.26 Inclusión de la presión de aspiración y de la presión final

#### 4.2.8 Elementos de segundo orden

Los *elementos de segundo orden* pueden originarse simplemente por la concatenación en serie de dos elementos de primer orden. Sin embargo, en el caso general, el elemento se caracteriza por estar formado por una combinación de resistencia, capacidad e inercia, con la particularidad de que entre estas dos últimas pueden trasvasarse mutuamente energía previamente acumulada.

Por ejemplo, en un circuito eléctrico del tipo R-L-C, puede acumularse energía tanto en el condensador como en la inductancia, y trasvasársela entre sí en los fenómenos oscilatorios.

Del mismo modo, un sistema mecánico, compuesto por un resorte soportado en un extremo, y provisto de una masa en el otro, es capaz de acumular energía elástica (por compresión o distensión) en el resorte, y energía cinética (por movimiento) en la masa, intercambiando estas energías en los movimientos oscilatorios.

Consideremos un circuito eléctrico R-L-C serie. Asignemos a la variable de entrada la tensión entre extremos del circuito  $V_e$ . Sin definir de manera específica la variable de salida, la figura 4.27 representará el diagrama de bloques genérico, en el que se contemplan todas las variables internas. Nótese que los tres bloques podrían intercambiarse libremente entre sí, sin más que adecuar el nombre de las variables asociadas.

Tal como se presenta el gráfico, podemos tomar como variable de salida cualquiera de las variables representadas, y efectuar las debidas operaciones para calcular la transmitancia del bloque. Supongamos que nos conviene asignar a la intensidad  $I(s)$  como variable de salida.

Una fuerza exterior  $f$  aplicada sobre la masa se verá equilibrada en todo momento, como consecuencia de la ley de Newton para sistemas de traslación, por la suma de la fuerza de aceleración  $f_a$  debida a la inercia de la masa, a la fuerza  $f_K$  de la tensión del resorte, y a la fuerza  $f_B$  de la fricción viscosa del amortiguador. Véase la figura 4.31(b).

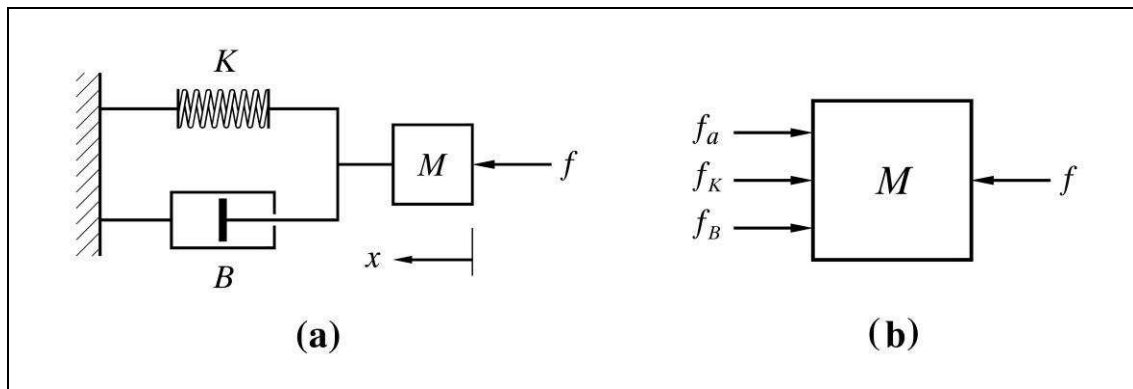


Fig. 4.31 Una masa suspendida de un resorte forma un sistema de segundo orden

En efecto

$$f = f_a + f_K + f_B$$

en donde

$$\begin{aligned} \text{Fuerza exterior} &= f \\ \text{Fuerza del resorte} &= f_K = Kx \\ \text{Fuerza de fricción} &= f_B = Bv = B \, dx/dt \\ \text{Fuerza de aceleración} &= f_a = Ma = M \, d^2x/dt^2 \end{aligned}$$

en las que

$$\begin{aligned} x &= \text{Desplazamiento} \\ v &= \text{Velocidad} = dx/dt \\ a &= \text{Aceleración} = d^2x/dt^2 \\ M &= \text{Masa} \\ K &= \text{Constante elástica del resorte} \\ B &= \text{Coeficiente de fricción viscosa del amortiguador} \end{aligned}$$

Dando valores a la ecuación general de equilibrio nos queda

$$f = M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K x$$

Consideraremos que en este dispositivo la fuerza  $f$  es la entrada, y el desplazamiento  $x$  es la respuesta o salida (fig. 4.32).

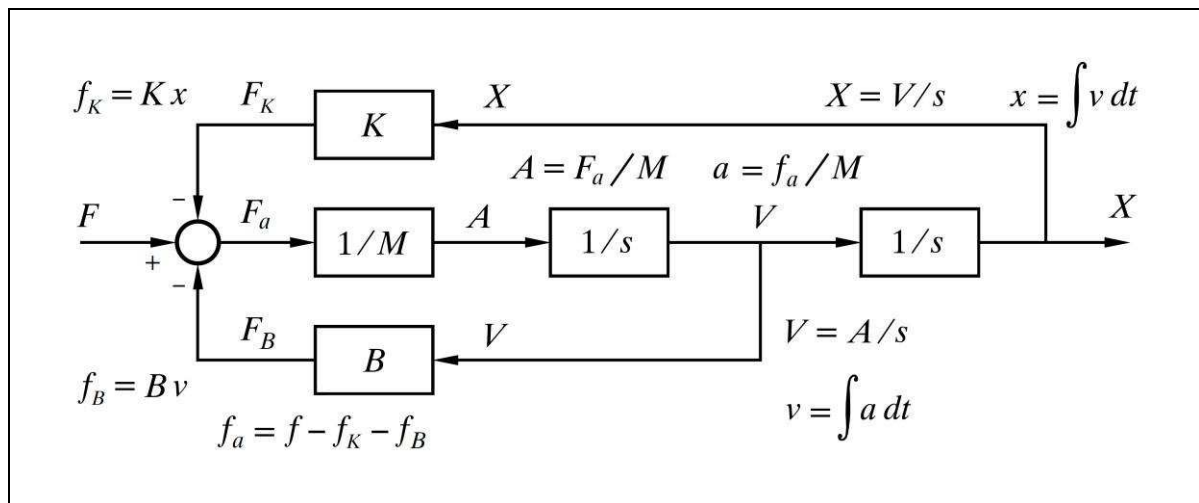


Fig. 4.32 Diagrama de bloques para un sistema de masa suspendida de un resorte y con amortiguación

Tomando laplacianas se tiene

$$F = M s^2 X + B s X + K X = X (M s^2 + B s + K)$$

de donde la transmitancia será

$$G = \frac{X}{F} = \frac{1}{M s^2 + B s + K} = \frac{\frac{1}{K}}{\frac{M}{K} s^2 + \frac{B}{K} s + 1}$$

y haciendo

$$T^2 = \frac{M}{K}; \quad T = \text{constante de tiempo} = \sqrt{\frac{M}{K}}$$

$$2\zeta T = \frac{B}{K}; \quad \zeta = \text{factor de amortiguación} = \frac{B}{2\sqrt{KM}}$$

se tiene finalmente

$$\frac{H_2}{Q_1} = \frac{R_2}{R_2 C_2 s + 1} = \frac{R_2}{T_2 s + 1}$$

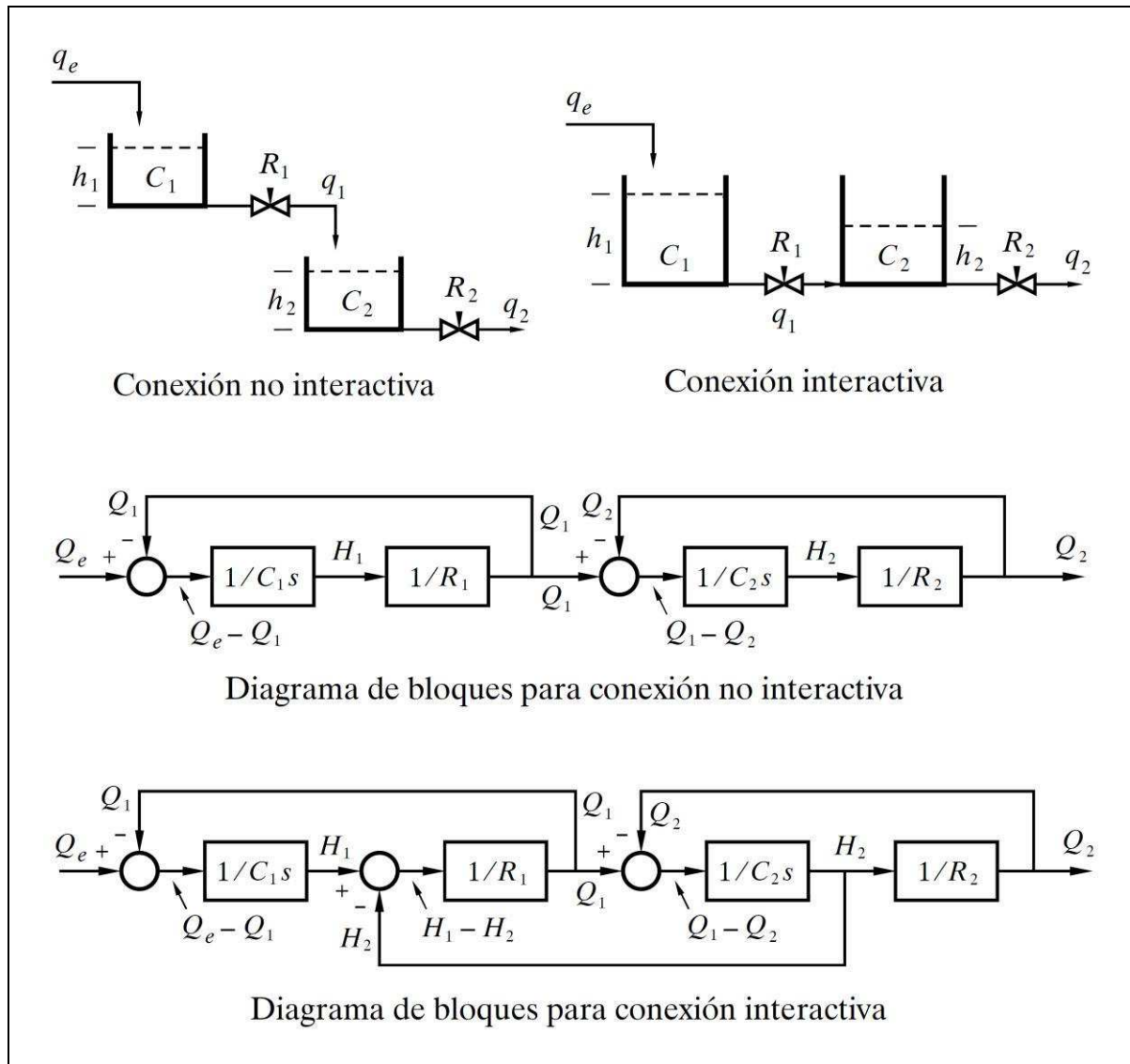


Fig. 4.36 Diagramas de bloques de dos niveles conectados en serie

La función de transferencia entre el nivel en el tanque 2 y el caudal de entrada en el tanque 1 será  $H_2/Q_e$ , y se obtendrá despejando  $Q_e$  y  $H_2$  de las dos ecuaciones anteriores

$$\frac{H_2}{Q_e} = \frac{R_2 Q_1}{T_2 s + 1} \frac{R_1}{(T_1 s + 1) H_1}$$

pero como

$$Q_1 = H_1/R_1$$

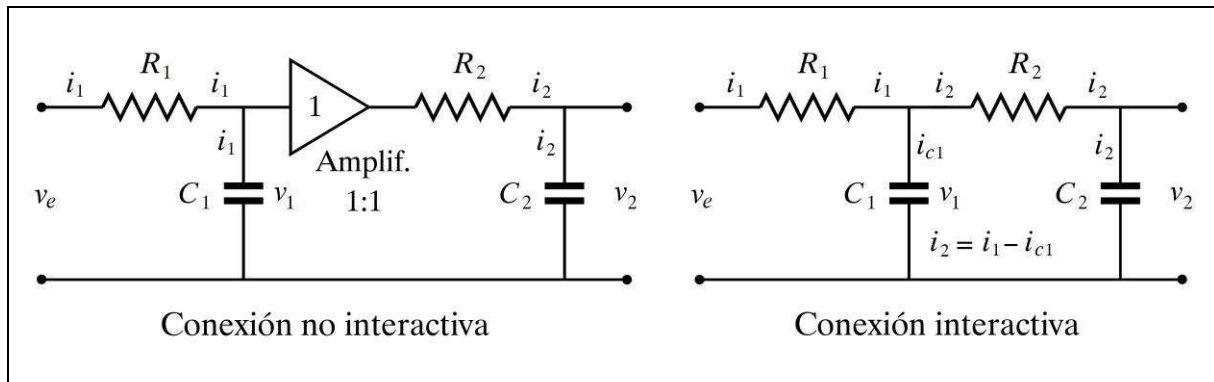


Fig. 4.37 Conexión interactiva y no interactiva de dos filtros R-C

**4.2.8.h) Bulbo de temperatura con vaina**

Es normal en la industria que un bulbo o sensor de temperatura se halle instalado, por razones de diversa índole, dentro de una funda protectora o vaina. Veremos cómo este sistema equivale a un retardo de segundo orden, originado por dos retardos de primer orden en serie con conexión interactiva.

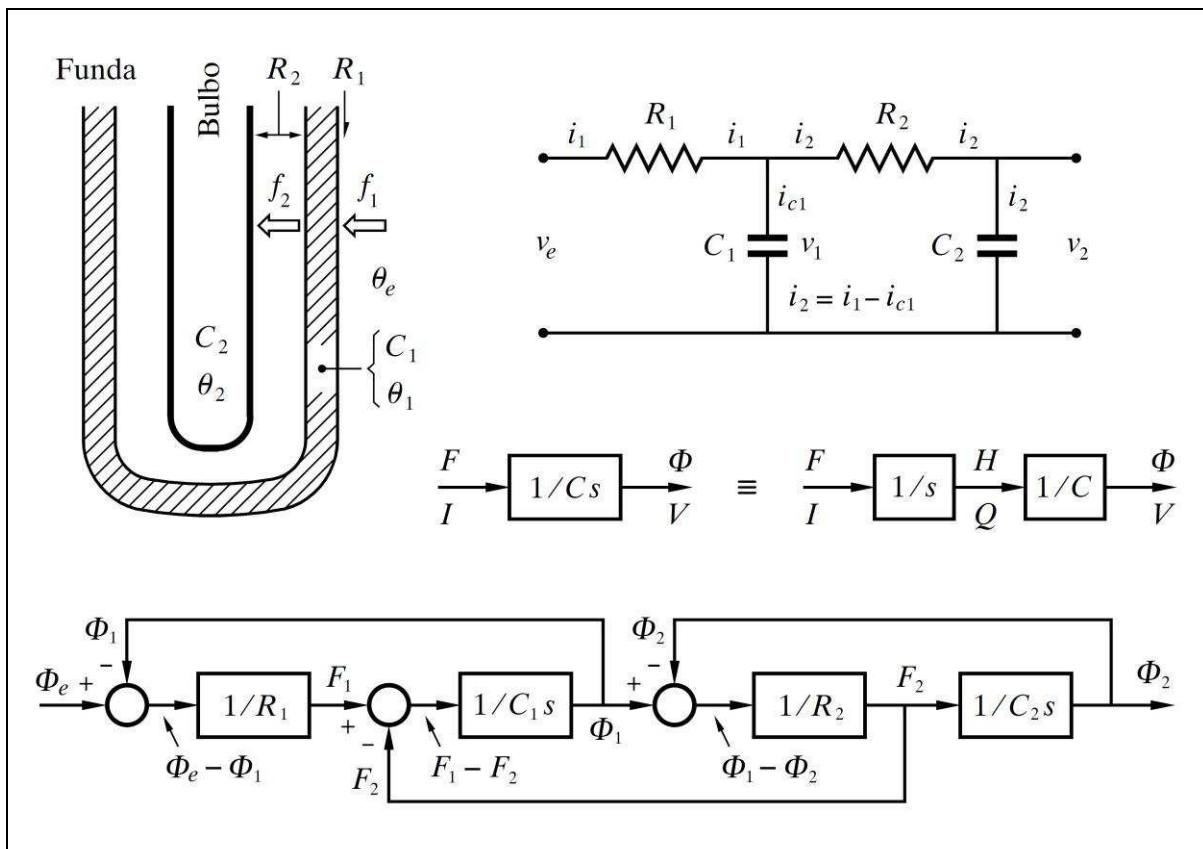


Fig. 4.38 Sistema térmico de bulbo de temperatura con vaina y su análogo eléctrico

La figura 4.38 muestra un croquis de este dispositivo. Dada su absoluta analogía con el circuito eléctrico formado por dos filtros R-C en serie, en su configuración interactiva, se dibuja asimismo este circuito, en el que se han anotado todas sus variables. También se representa el correspondiente diagrama de bloques, habiéndose esbozado, además, el desglose de un bloque del tipo  $[1/Cs]$  en los bloques  $[1/s]$  y  $[1/C]$ . Esto permite considerar la variable intermedia *cantidad de calor*  $h$ , como resultado de la integración del *flujo calórico*  $f$  (o, análogamente, la carga eléctrica  $q$ , como consecuencia de la integración de la intensidad  $i$ ). El resultado de la división de la *cantidad de calor*  $h$  por la *capacidad*  $C$  proporciona la *temperatura*  $\theta$  (o su análogo: la carga  $q$  dividido por la capacidad  $C$  es igual a la tensión  $v$ ).

Las variables análogas entre los dos sistemas son las que se indican en la tabla siguiente, en la que en las columnas “Símbolos” se ha indicado con letras minúsculas las variables en su expresión temporal, y con mayúsculas su expresión laplaciana. Por razones diversas, en este texto la letra mayúscula  $\Phi$  (Fi) se halla en correspondencia con la letra minúscula  $\theta$  (Theta).

| Sistema térmico          |          |        | Sistema eléctrico      |          |     |
|--------------------------|----------|--------|------------------------|----------|-----|
| Variable                 | Símbolos |        | Variable               | Símbolos |     |
| <i>Temperatura</i>       | $\theta$ | $\Phi$ | <i>Tensión</i>         | $v$      | $V$ |
| <i>Flujo calórico</i>    | $f$      | $F$    | <i>Intensidad</i>      | $i$      | $I$ |
| <i>Cantidad de calor</i> | $h$      | $H$    | <i>Carga eléctrica</i> | $q$      | $Q$ |

Las ecuaciones de equilibrio térmico de este sistema son las siguientes:

Para el *bulbo de temperatura* (ver la definición de las variables en la descripción de este elemento, efectuada anteriormente, págs. 64 a 66), se tendrá

$$M_2 c_{p2} \frac{d\theta_2}{dt} = U_2 A_2 (\theta_1 - \theta_2)$$

recordando que  $M c_p = C$  y que  $UA = 1/R$ , queda

$$R_2 C_2 \frac{d\theta_2}{dt} + \theta_2 = \theta_1$$

$$\Phi_2 (R_2 C_2 s + 1) = \Phi_1$$

$$\Phi_2 (T_2 s + 1) = \Phi_1$$



calor. De lo contrario, y tal como veremos en las prácticas de simulación, el control de un proceso puede hacerse extremadamente difícil.

Digamos también que la resistencia  $R_1$  disminuirá con la agitación del medio exterior. Un mayor régimen turbulento reducirá el coeficiente de película, debido a la reducción de la fina capa de fluido en contacto con una superficie que, por carecer de movimiento convectivo, es responsable de la mayor parte de la resistencia a la transmisión del calor. Por otra parte, esta resistencia se ve incrementada por la rugosidad de la superficie (aumenta el grosor de la capa de fluido en contacto), y de aquí que sea conveniente un buen pulido de las superficies.

#### 4.2.8.i) Tanque encamisado

Es otro ejemplo de un sistema compuesto por dos retardos de primer orden interactivos. La figura 4.39 muestra un croquis de un tanque agitado y recubierto por una camisa por la que circula un fluido térmico, produciéndose intercambio de calor entre los dos fluidos.

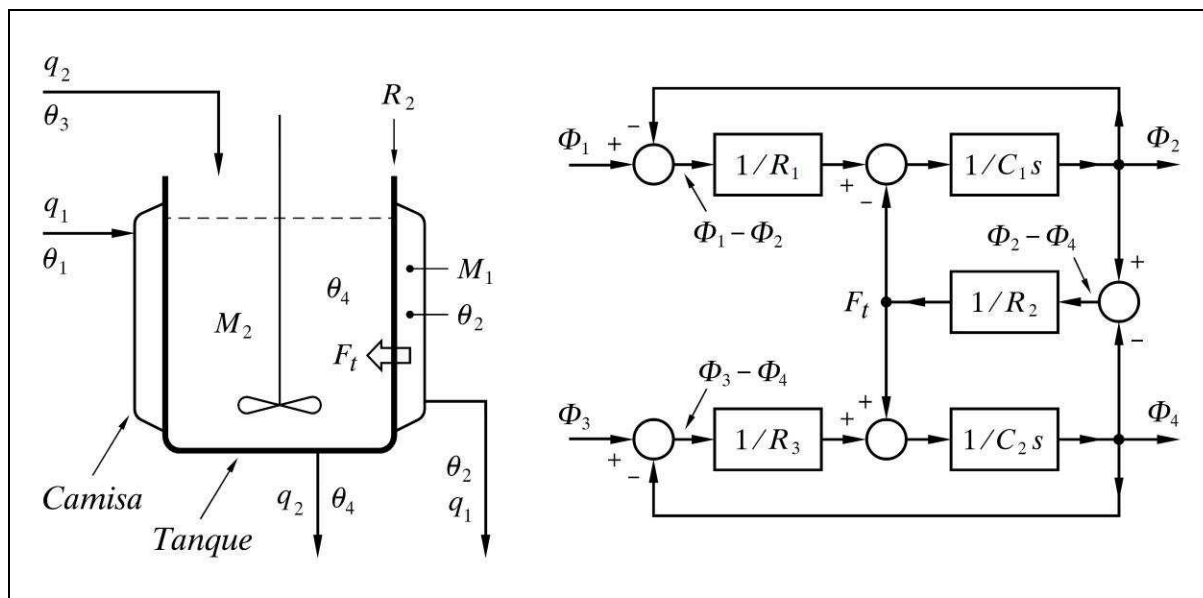


Fig. 4.39 Tanque encamisado con intercambio de calor

Se ha dibujado, asimismo, el diagrama de bloques, de tal modo que muestra el flujo de señales considerando dos posibles variables de entrada, la temperatura  $\Phi_1$  y la temperatura  $\Phi_3$ . Igualmente, se han representado como posibles variables de salida las temperaturas  $\Phi_2$  y  $\Phi_4$ .

Se ha indicado como  $F_t$  a la variable interna cuyo significado es el *flujo de calor transferido* entre camisa y tanque. Recuérdese el desglose de  $[1/Cs]$  en  $[1/s]$  y

ciones de las variables a partir de un valor de referencia (condiciones iniciales). Sucede, sin embargo, que, debido a que se está tratando con funciones lineales, es posible trabajar con los valores absolutos de las variables, debido al principio de superposición. Más adelante desarrollaremos ampliamente estos conceptos, y veremos cómo, para hallar las respuestas temporales de un sistema, es preciso incorporar a la respuesta los valores de las condiciones iniciales o de referencia.

#### 4.2.8.j) Dos tanques a presión en serie

La figura 4.40 representa un croquis de dos tanques de gas, de capacidades  $C_1$  y  $C_2$ , unidos entre sí por una restricción,  $R_2$ . Cada uno de ellos se halla conectado, a través de sendas restricciones,  $R_1$  y  $R_3$ , a sus respectivas fuentes de presión,  $p_1$  y  $p_3$ . Se dibuja también el circuito eléctrico análogo, asumiendo que se han linealizado las resistencias del sistema neumático.

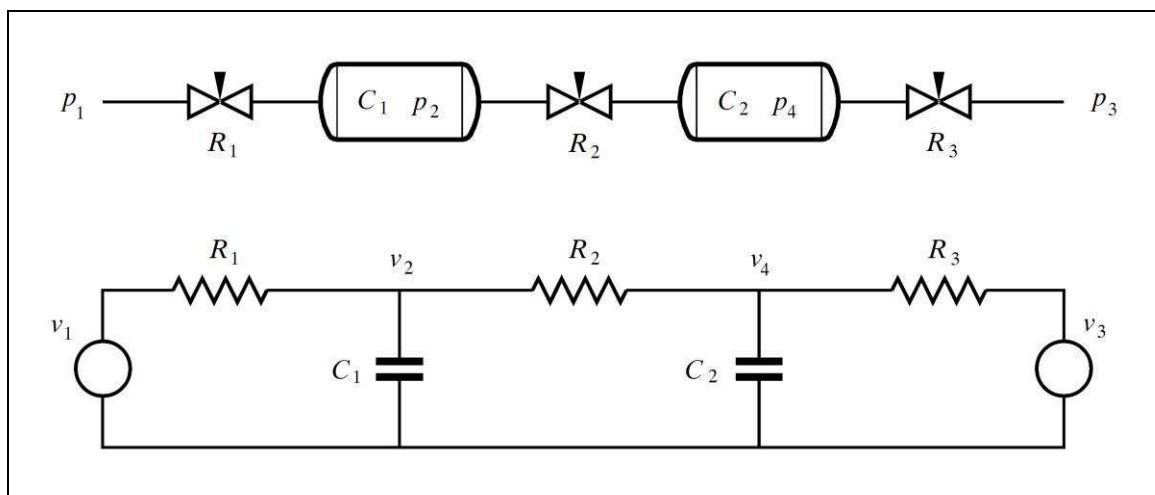


Fig. 4.40 Dos tanques a presión en serie y su análogo eléctrico.

Estos sistemas son absolutamente análogos al del tanque encamisado, visto últimamente, aunque no sea evidente a primera vista. Un análisis detenido nos mostrará que pueden ser representados por el mismo diagrama de bloques, sin más que adecuar los nombres de las variables. En consecuencia, por analogía, son igualmente válidas las ecuaciones de partida y las transmitancias obtenidas.

#### 4.2.9 Elemento tiempo muerto

El *tiempo muerto* es una característica de aquellos procesos físicos en donde existe un transporte de materia a lo largo de un determinado trayecto y a una velocidad finita. Cualquier cualidad de la materia transportada, expresada por alguna varia-

cinta magnética de la señal, efectuado mediante dos cabezales debidamente separados, y controlando la velocidad de la cinta.

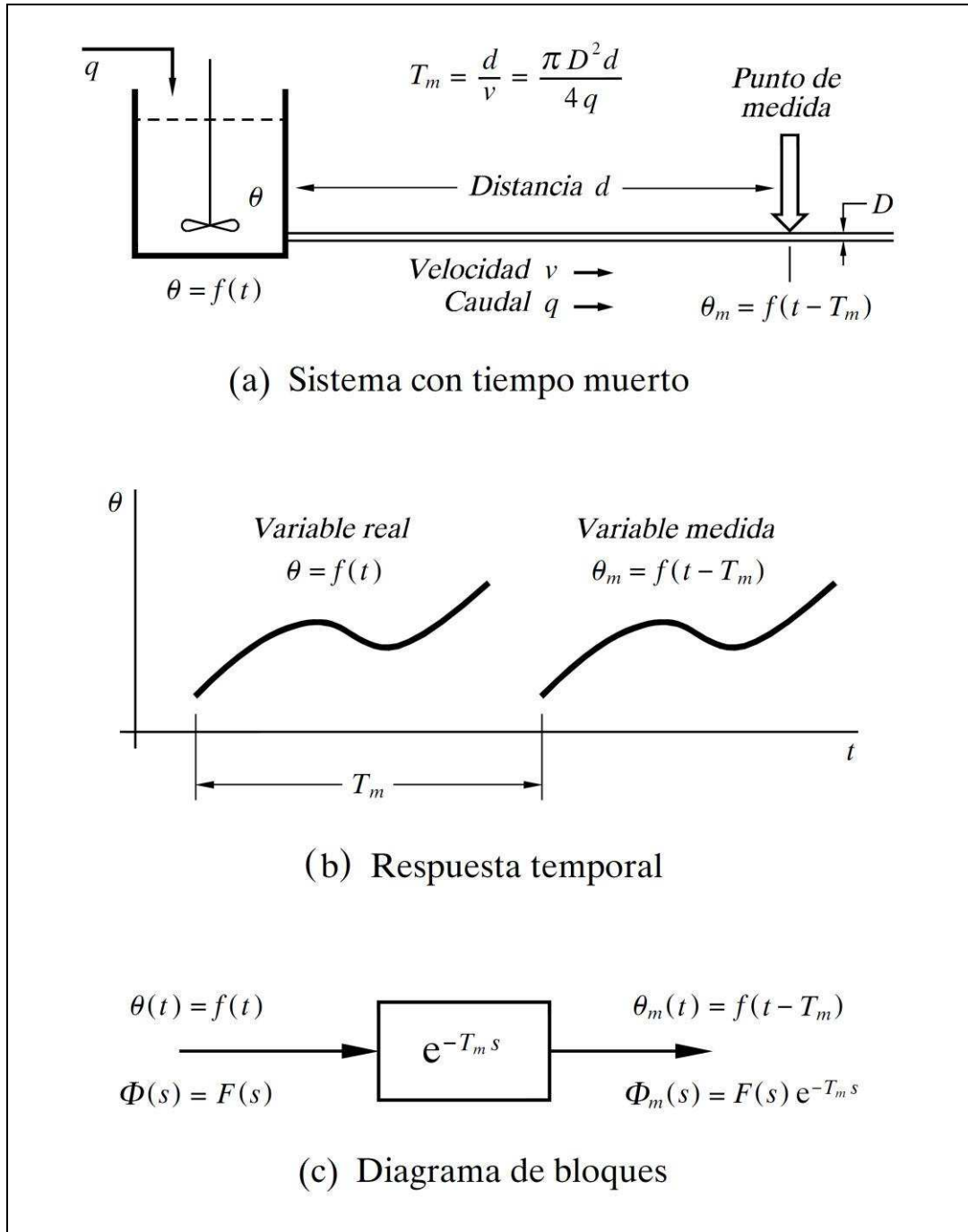


Fig. 4.41 Tiempo muerto debido al tiempo de transporte

Por el contrario, la simulación de un *tiempo muerto* en un ordenador resulta sencilla y precisa. Dado que todas las señales son digitalizadas, es fácil introducirlas en una *memoria circular* y recuperar su valor un “tiempo” más tarde. El único inconveniente es que será preciso reservar memoria suficiente para almacenar el valor

de cada variable implicada, tantas veces como unidades elementales de tiempo (intervalos de discretización) estén comprendidas en el tiempo muerto que se trate de simular. La cantidad de memoria utilizada es tanto mayor cuanto mayores sean el tiempo muerto y la frecuencia de muestreo. Por ejemplo, dada una variable sometida a un tiempo muerto de 60 segundos y operando a 16 muestras por segundo, se tienen 960 valores retenidos constantemente, que a razón de 12 bits (típicamente) por cada valor resulta un total de 11.520 bits (1.440 bytes), solamente para el valor de una variable a 12 bits. Sin embargo, con los ordenadores y las técnicas de programación modernas, este inconveniente se salva sin dificultad, como bien podrá comprobar el lector cuando realice los ejercicios prácticos con el ordenador.

#### Nota aclaratoria

El programa *ControlP* maneja los datos en el formato de coma flotante de 8 bytes (64 bits). Esto permite operar internamente con el equivalente de 15 ÷ 16 dígitos decimales significativos de precisión, es decir, con una resolución del orden de una parte por  $10^{15}$ , y en un margen dinámico de  $5,0 \times 10^{-324}$  a  $1,7 \times 10^{308}$ , tanto para valores positivos como negativos.

#### 4.2.10 Elemento adelanto-retardo

Este elemento es poco frecuente encontrarlo en los sistemas reales, si se exceptúan los sistemas electrónicos. Raramente, aunque es posible, podrían encontrarse en sistemas mecánicos.

Precisamente si ofrece interés su estudio es porque es muy sencillo sintetizarlo con componentes electrónicos, y esta es su utilidad y aplicación: estos dispositivos se emplean en los sistemas de control como elementos de compensación en la regulación, según veremos más adelante.

En la figura 4.42 se muestra la disposición de un circuito electrónico que forma una red de *adelanto*. La red se ha provisto de una amplificación adicional, de valor  $\alpha = (R_1 + R_2) / R_2$ , a efectos de que la ganancia estática global sea unitaria.

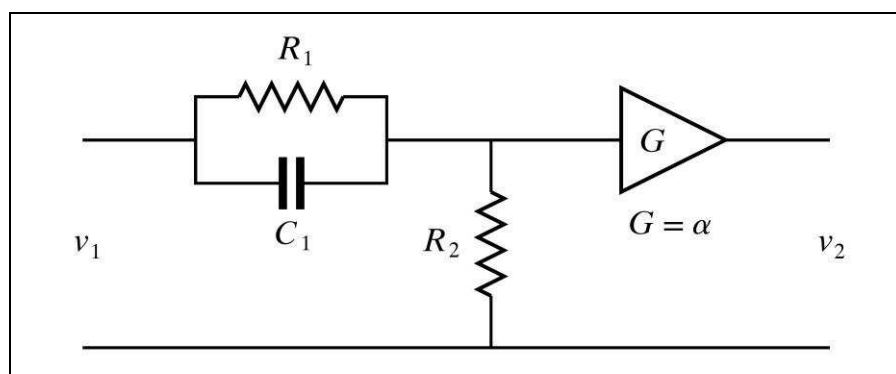


Fig. 4.42 Red electrónica de adelanto

do al diseño específico de la restricción, el flujo de circulación  $q$  se producirá en régimen laminar, por lo que obedecerá a una función lineal de descarga.

En efecto, tendremos

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{f}{A} \quad (A = \text{área del émbolo})$$

$$q = \frac{\Delta p}{R} = \frac{f}{RA} \quad (q = \text{flujo de circulación})$$

Si llamamos  $v$  a la velocidad de desplazamiento del émbolo

$$v = \frac{q}{A} = \frac{f}{RA^2}$$

y definimos

$$\text{Coeficiente de fricción viscosa: } B = \frac{f}{v} = RA^2$$

tendremos la *ecuación del amortiguador*:

$$v = \frac{1}{B} f$$

Es decir, que para una geometría determinada, la velocidad de desplazamiento del vástago y del émbolo es proporcional a la fuerza aplicada al vástago.

El sistema mecánico, análogo al electrónico de la fig. 4.44, que se había enunciado, se esquematiza en la figura 4.46.

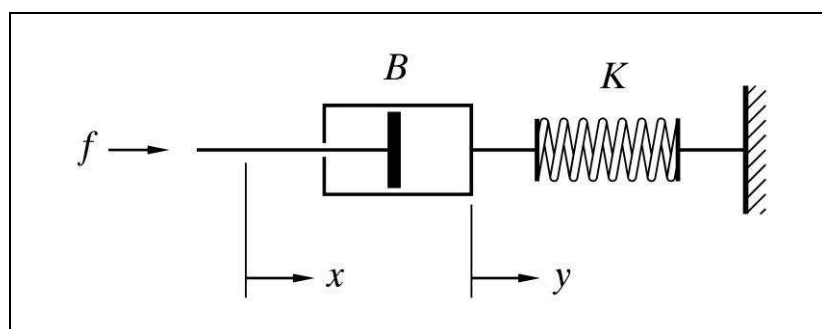


Fig. 4.46 Elemento mecánico anticipativo

- Banda proporcional (BP)

Es el *tanto por ciento* de escala que la *medida* (variable controlada) debe recorrer para mover el *elemento final de control* (salida del controlador) de una posición extrema a la otra (la totalidad de la carrera). Si se asume que el punto de consigna es constante, hablar de variaciones de la medida equivale a hablar de variaciones de la señal de error de la misma magnitud. Si lo que cambia es la consigna, y la medida se mantiene constante, en esta definición hay que sustituir *medida* por *consigna*, y en cualquier caso puede sustituirse por *señal de error* (o *desviación*).

Con una banda proporcional estrecha sólo se requieren un pequeño cambio en la medida para que la válvula efectúe la totalidad de su carrera. Por el contrario, con una banda ancha, un gran cambio de la medida producirá un pequeño movimiento en la posición de la válvula. Con una banda proporcional del 100% los cambios en la válvula serán de la misma magnitud en porcentaje que los de la medida.

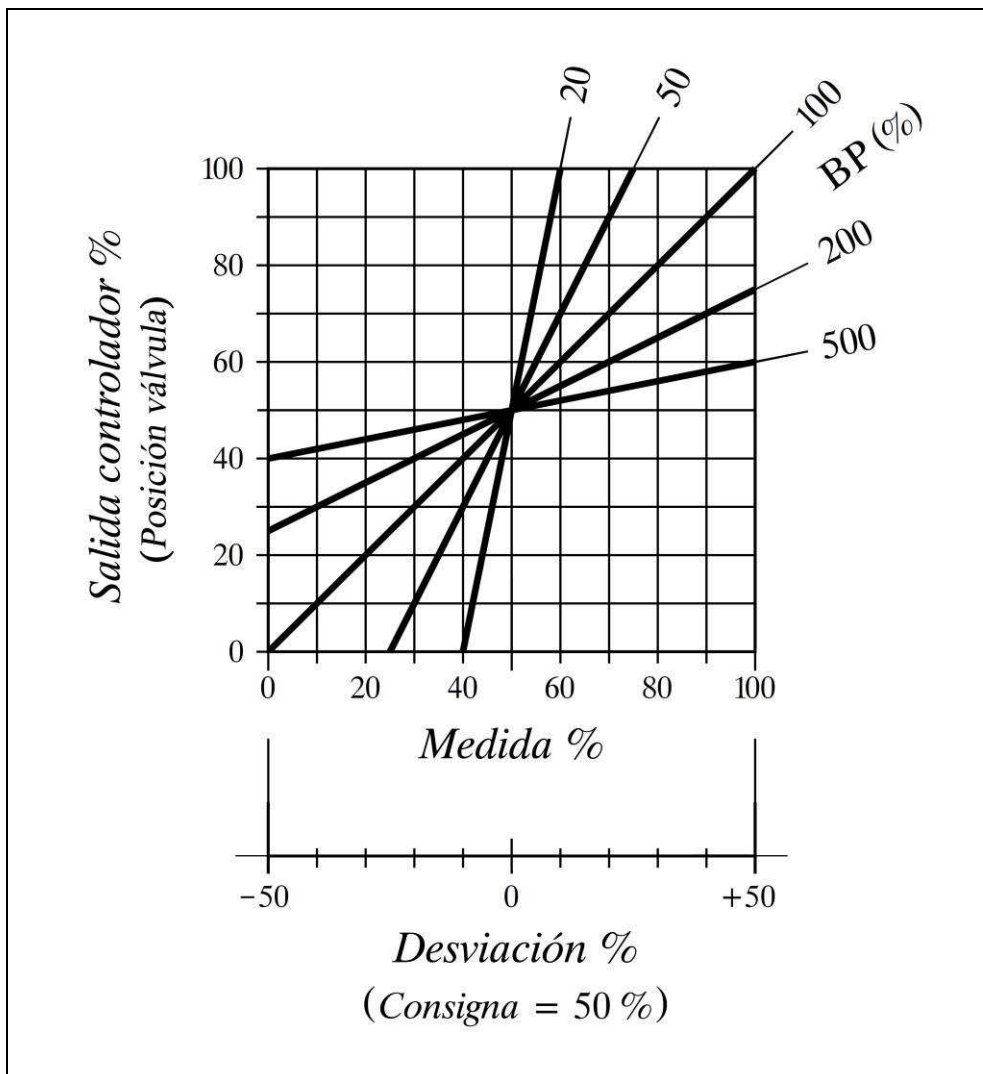


Fig. 4.47 Representación gráfica de la banda proporcional

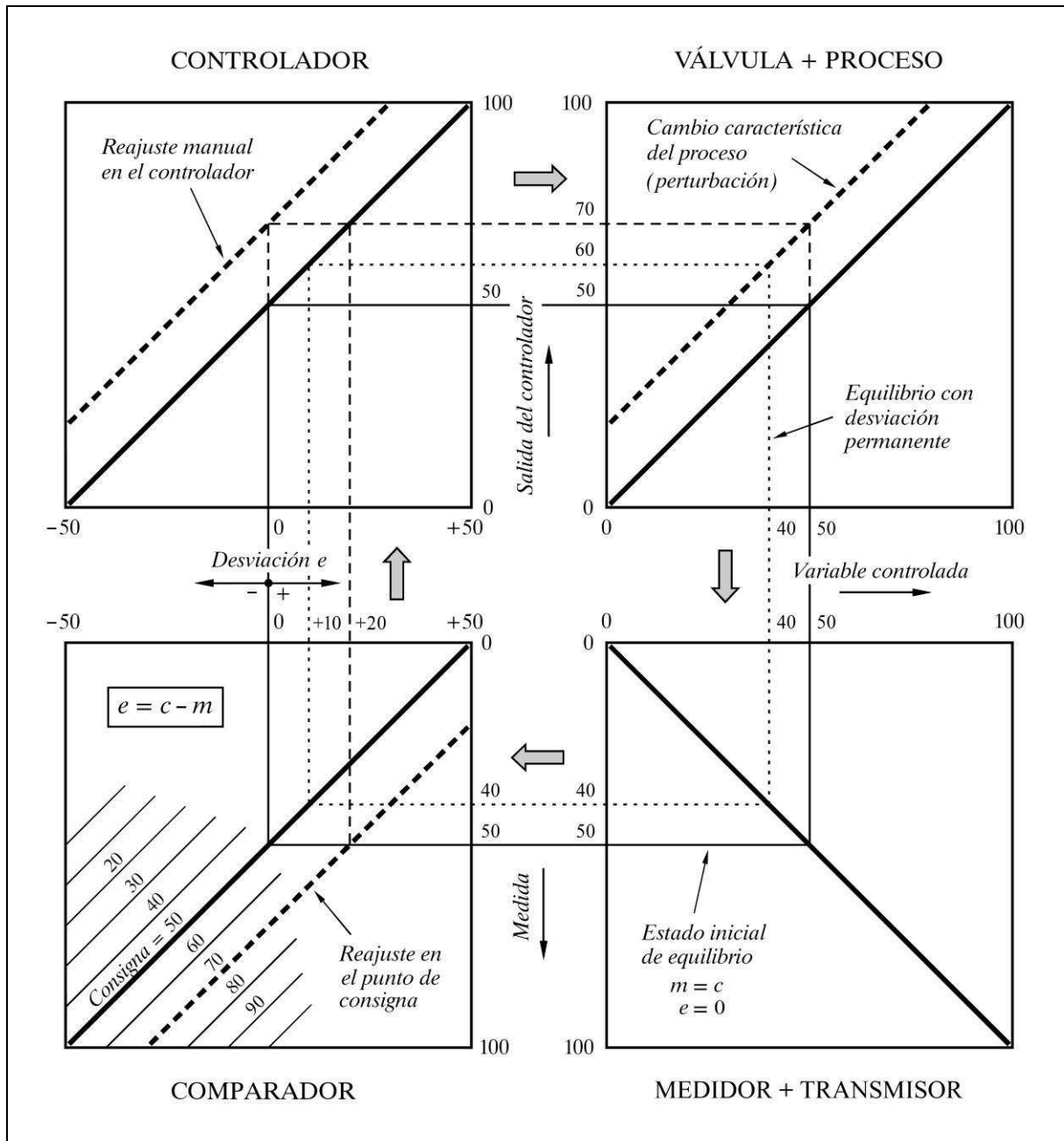


Fig. 4.49 Reajuste manual para compensar un cambio de carga

La segunda posibilidad, sería *desplazar la curva de respuesta del controlador*, según la línea de trazos gruesos en la figura 4.49, modificando el equilibrio estático del controlador. La salida del controlador aumenta y la variable controlada retorna al valor deseado, con una desviación nula. Puede parecer una buena solución, y teóricamente lo es; pero tener que “retocar” el controlador cada vez que acontece un cambio de carga o bien que se requiera un cambio en el punto de consigna, no es aceptable desde un punto de vista práctico. En la figura 4.50(b) se resalta con línea extragruesa el trazado de las condiciones de equilibrio.

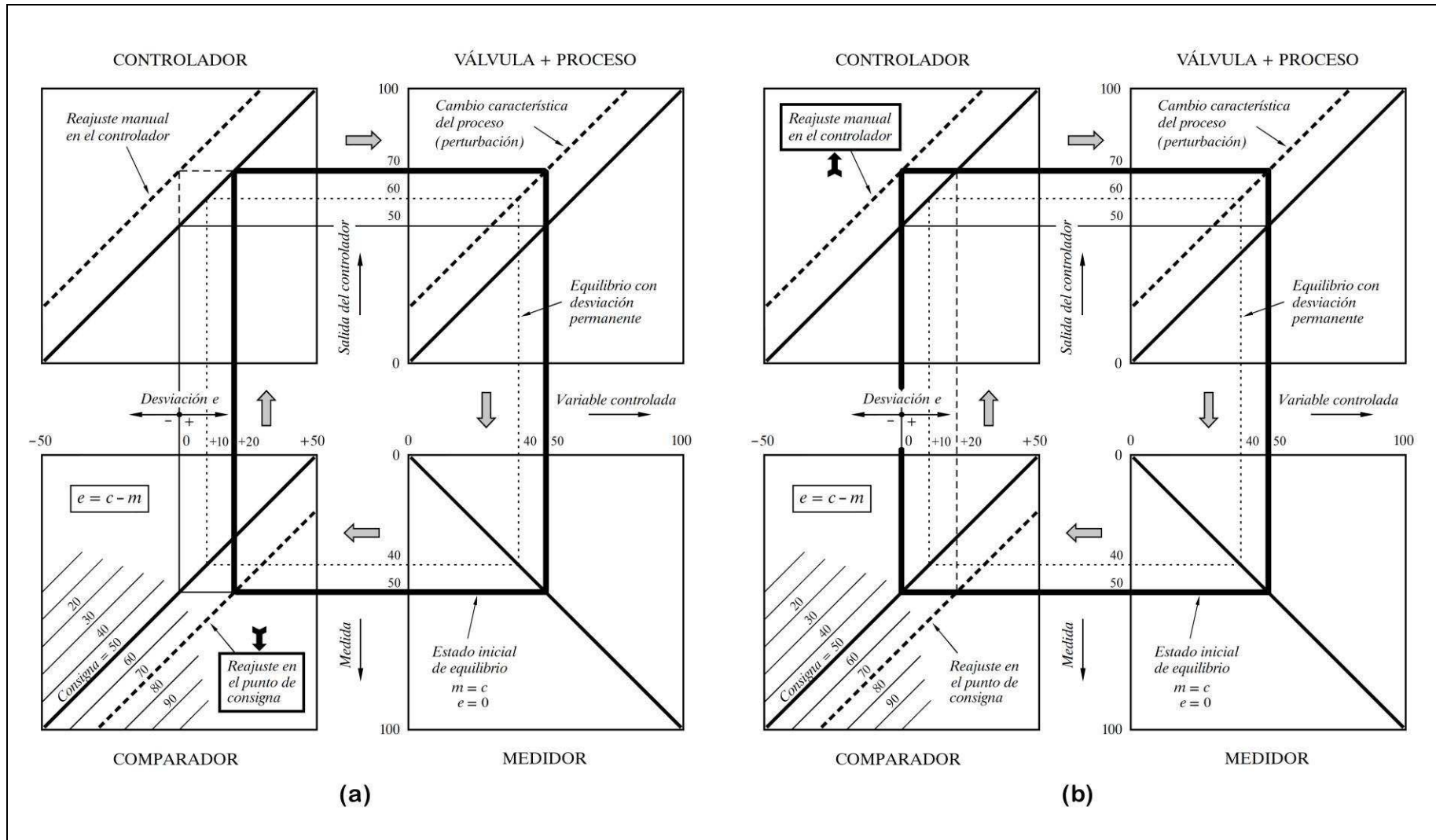


Fig. 4.50 Trazados particulares de reajuste manual para condiciones de equilibrio



Lo que significa que las unidades de la escala de amplitudes (eje de ordenadas) indicarán el valor  $y/A$ , y las unidades de la escala de tiempos (eje de abscisas) indicarán  $t/T$ . A efectos prácticos, para convertir las lecturas sobre las escalas en valores reales de las variables, se efectuarán las sencillas operaciones:

$$y = A y^*$$

$$t = T t^*$$

En la figura 5.2 se representa la misma curva con las escalas tipificadas. Se han acotado los distintos valores de la salida para tiempos correspondientes a sucesivas constantes de tiempo, y se han dibujado sus tangentes.

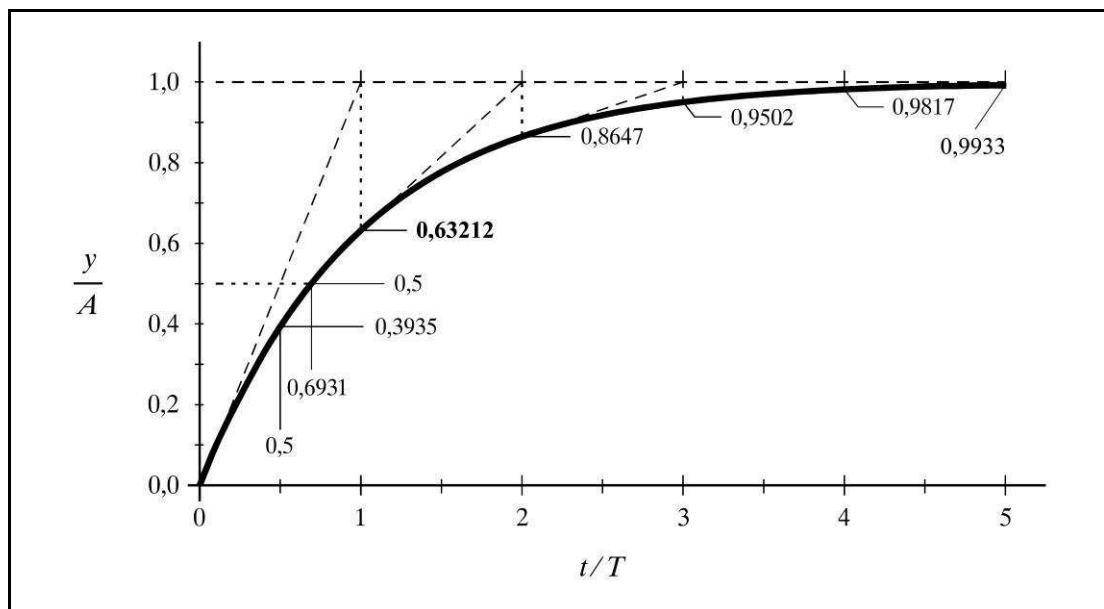


Fig. 5.2  
Respuesta al escalón, tipificada, de un bloque retardo de primer orden

En la tabla de la página siguiente se muestra una serie de valores *alcanzados* y valores *restantes*, correspondientes a diversos tiempos singulares, en especial múltiplos de la constante de tiempo  $T$ . Nótese que para un tiempo  $5T$  se ha alcanzado ya el 99,33 %, en donde prácticamente se considera que ha sido alcanzado el valor final.

Procedamos a efectuar nuestra primera práctica de ordenador con el programa *ControlP*. El lector habrá leído el anexo 1, “*Guía de manejo del programa*”, y no tendrá, por tanto, ninguna dificultad en arrancarlo. Es conveniente proveerse de una tira de papel o cartulina fina, de unos 2 cm de ancho por unos 25 o 30 cm de largo (lo ideal es que sea de plástico transparente).

| Tiempo<br>( $T = \text{cte. tpo.}$ ) | Valor<br>alcanzado (%) | Valor<br>restante (%) |
|--------------------------------------|------------------------|-----------------------|
| 0                                    | 0,000                  | 100,000               |
| 0,5 $T$                              | 39,347                 | 60,653                |
| <b>0,6931 <math>T</math></b>         | <b>50,000</b>          | <b>50,000</b>         |
| $T$                                  | <b>63,212</b>          | <b>36,788</b>         |
| 2 $T$                                | 86,466                 | 13,534                |
| 3 $T$                                | 95,021                 | 4,979                 |
| 4 $T$                                | 98,168                 | 1,832                 |
| 5 $T$                                | 99,326                 | 0,674                 |
| 10 $T$                               | 99,995                 | 0,0045                |

### Práctica nº 5.1

Por razones de eficiencia y comodidad asumiremos que el manejo de programa será efectuado por mediación del teclado. Obviamente, puede operarse a la manera tradicional usando el ratón mediante los menús de la barra de menús de Windows.

El símbolo “➤” indica **intervención** del usuario a efectuar en el programa.

- Seleccionar la opción *Retardo primer orden* del *MENÚ GENERAL*.
- Pulsar *C/P*, es decir, *Cambios/Parámetros*.
- Introducir el valor:  
*Constante de tiempo  $T = 1$*
- Pulsar *C/C*, es decir, *Cambios/Constantes*.
- Introducir los siguientes valores:  
*Escalón = 100*  
*Valor inicial = 0*  
*Duración = 5*
- Ejecutar la gráfica de la respuesta temporal al escalón pulsando:  
*T/E*, es decir, *Temporal/Escalón*

En pantalla aparecerá una gráfica equivalente a la mostrada en la figura 5.1. Comprobar, con ayuda de la tira de papel o de plástico, apoyándola sobre la pantalla, como si de una regla se tratara, los valores correspondientes de la salida para los sucesivos valores del tiempo, teniendo en cuenta que se ha seleccionado una constante de tiempo igual a la unidad.

- Cambiar la *constante de tiempo* al valor 2 y ejecutar la nueva gráfica. Cambiar otra vez la *constante de tiempo* a 0,5 y volver a ejecutar la gráfica.

Esta última expresión tiene la ventaja de que puede ser escrita en la forma más sencilla y convencional:

$$y = 1 - B e^{-\zeta \omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \varphi)$$

donde

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} ; \quad \omega_n = \frac{1}{T} ; \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta} = \cos^{-1} \zeta$$

Se ve claramente que es una función oscilatoria amortiguada, porque contiene una función *senoidal* multiplicada por una función *exponencial decreciente*.

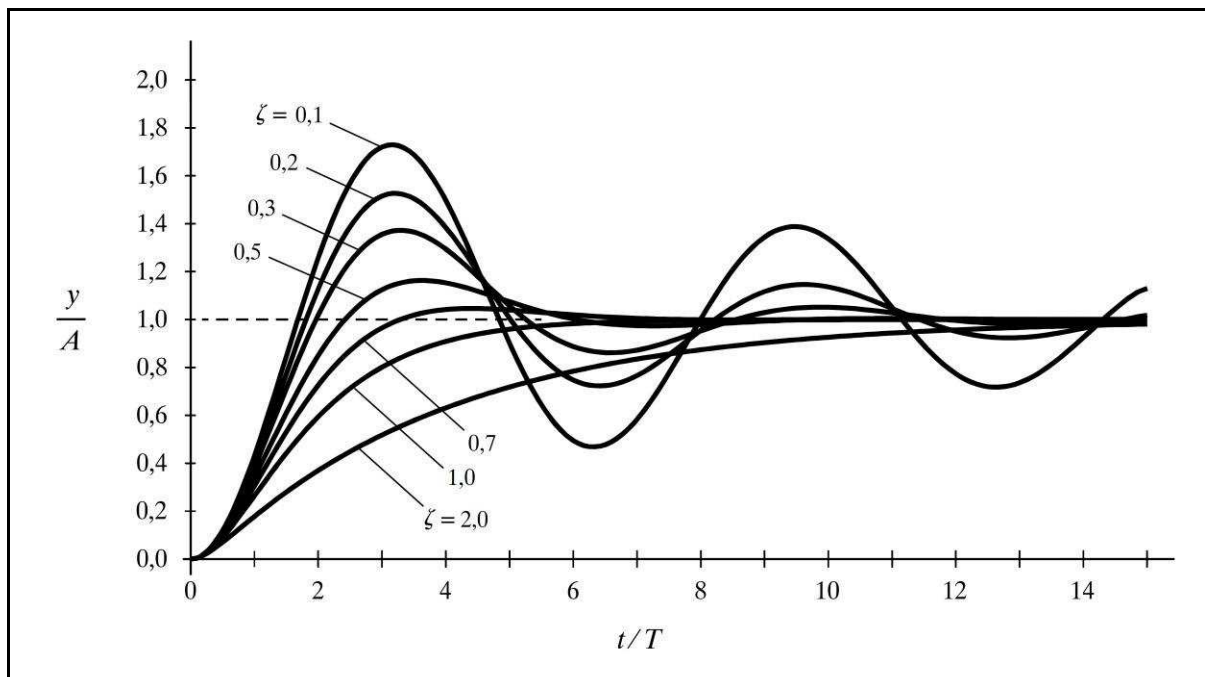


Fig. 5.5 Respuesta al escalón de un retardo de segundo orden

El valor final alcanzado (estado estacionario) lo obtenemos fácilmente al hacer  $t = \infty$  en las ecuaciones y vale 1; es decir, el valor del escalón. Nótese que el término que contiene la exponencial se ha extinguido. Obtendríamos el mismo valor aplicando el teorema del valor final a la función transformada de la transmitancia.

Calcularemos el valor inicial (para  $t=0$ ), así como la pendiente geométrica de la curva en este punto, y para  $t \rightarrow \infty$ , tal como hemos hecho para el elemento retardo de primer orden.

La figura 5.8 muestra también esta respuesta, en donde se ha hecho  $T_1 = 0,5$  y  $T_2 = 1$ , con lo que el citado factor vale  $-0,5$  y, por lo tanto, la respuesta arranca con un valor  $y(0+) = 1 - 0,5 = 0,5$ . En ambas curvas la constante de tiempo de la exponencial es la misma, por serlo  $T_2$ , que es la constante de tiempo natural de ambos elementos.

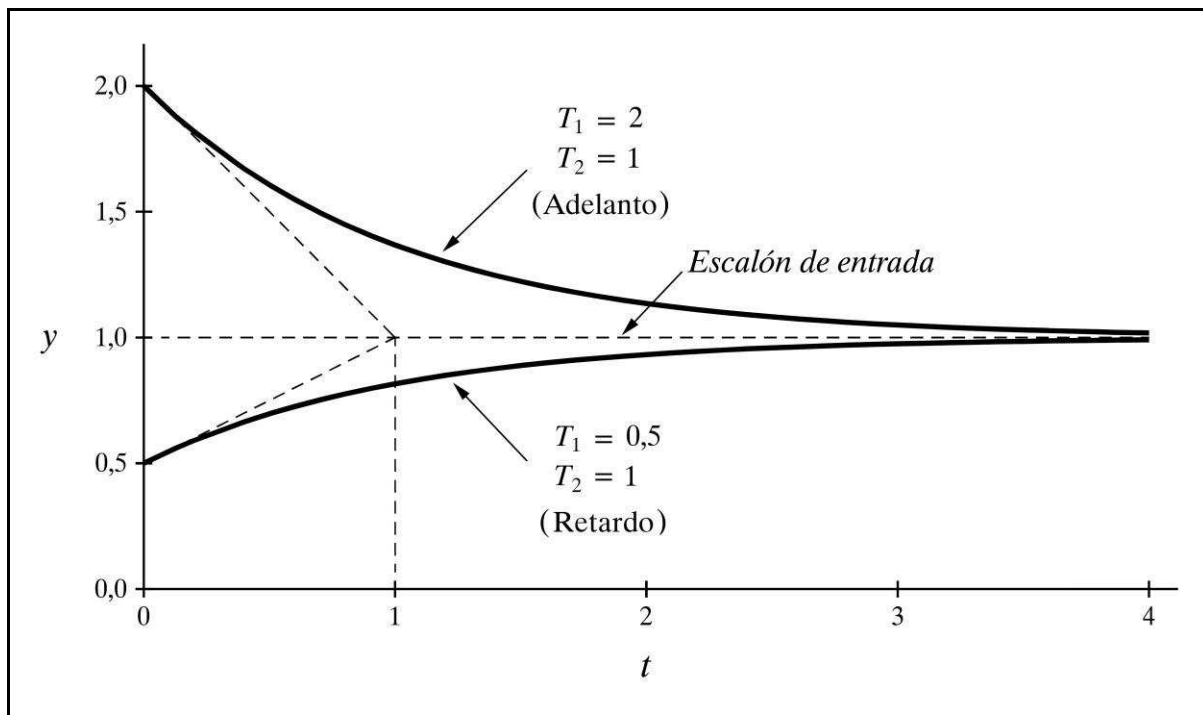


Fig. 5.8 Respuesta indicial de un bloque adelanto-retardo

En ambos casos podemos ver el efecto corrector, anticipativo o retardante, de un bloque de este tipo, instalado estratégicamente en un sistema de control, lo que será más obvio al estudiar la respuesta a la rampa. Por esta razón, a las constantes de tiempo  $T_1$  y  $T_2$  las llamamos *tiempo de adelanto* y *tiempo de retardo*, respectivamente, si bien ello debe conducir a una interpretación más bien conceptual o cualitativa, que no rigurosa.

Más adelante, en el apartado 5.5.3, veremos cuáles son los verdaderos tiempos de adelanto y retardo en la respuesta a una rampa.

### Práctica nº 5.12

- Partiendo del *MENÚ GENERAL*, entrar en la opción *Adelanto-retardo*.
- Introducir los valores:
  - Tiempo adelanto*,  $T_1 = 2$
  - Tiempo retardo*,  $T_2 = 1$

con un factor de escala  $T_1 - T_2$ . Al completarse esta exponencial, para  $t \rightarrow \infty$ , es este factor de escala el que define el *error estacionario*, siendo positivo o negativo, según se trate del caso adelanto o retardo. No olvidemos que si la pendiente de la rampa fuese de un valor  $A$ , la función entera se vería multiplicada por este valor, lo mismo que el error estacionario, que valdría

$$\text{Error estacionario: } A(T_1 - T_2)$$

Nos queda efectuar la evaluación, para tiempos grandes, del tiempo de adelanto (o de retraso) de la curva de respuesta, con relación a la rampa generadora. Un sencillo análisis geométrico o matemático, permite ver que el tiempo buscado vale

$$\tau = T_1 - T_2$$

el cual puede ser positivo o negativo, y es independiente del valor de la rampa.

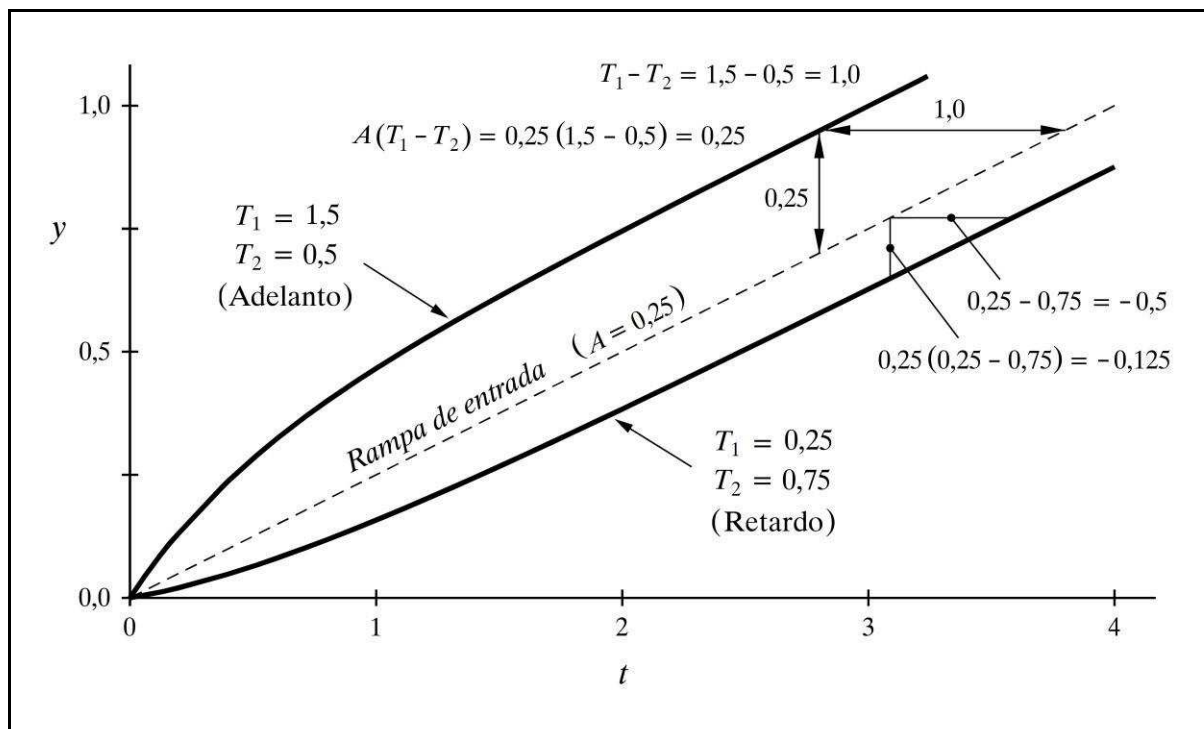


Fig. 5.9 Respuesta a la rampa de un bloque adelanto-retardo

Si se pretende tipificar las curvas de respuesta, la ecuación de la respuesta temporal podrá ser reescrita como

$$\frac{y}{A T_2} = \frac{t}{T_2} + \left( \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \left( 1 - e^{-t/T_2} \right)$$

con lo que se tendrá

$$y = G R t$$

Comprobemos la *anticipación* debida a la acción derivativa, lo que equivale al desplazamiento horizontal entre las gráficas de respuesta (con o sin acción derivativa) o, dicho de otro modo, con qué antelación se alcanzará un valor cualquiera de salida debido a la acción derivativa.

Llamemos  $t$  al tiempo necesario para alcanzar una determinada salida en el controlador P, y  $t - \tau$  al tiempo en que el controlador PD alcanzará esta misma salida, donde  $\tau$  es el tiempo de anticipación buscado. Puesto que las salidas son iguales, podemos igualar las dos expresiones

$$G R t = G R (t - \tau) + G R T_d$$

de donde se obtiene

$$\tau = T_d$$

es decir, que:

*El tiempo de anticipación en la respuesta a la rampa de un controlador PD, debida a la acción derivativa, es precisamente el tiempo derivativo  $T_d$ ; y es independiente de la ganancia del controlador y de la pendiente de la rampa.*

Ello coincide con lo enunciado al describir la acción derivativa en el apartado 4.2.12.d (pág. 149).

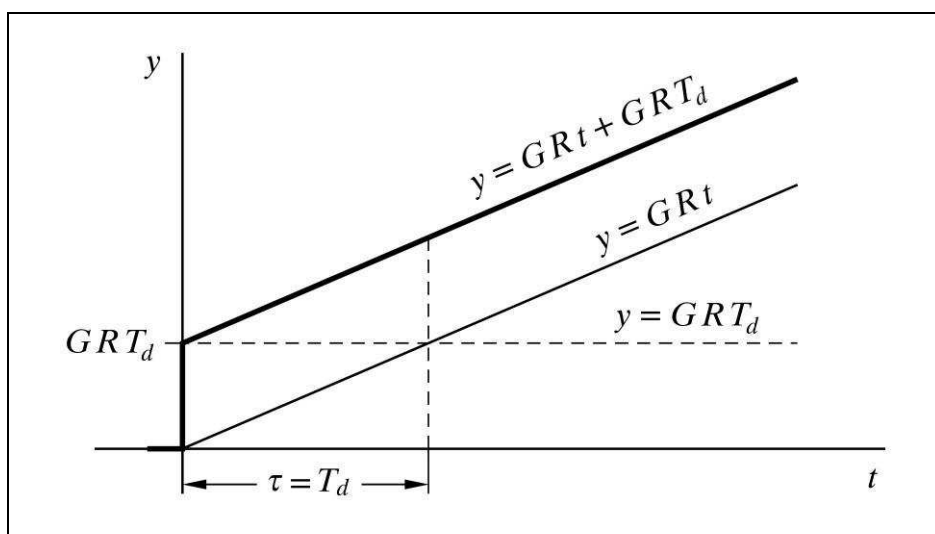


Fig. 5.11 Anticipación debida a la acción derivativa en la respuesta a una rampa de un controlador PD

de donde

$$\tau = T_i$$

es decir, que:

*El tiempo en que la acción integral de un controlador PI tarda en repetir la variación instantánea de salida producida por la acción proporcional, en respuesta a una señal de error en escalón, es precisamente el tiempo integral  $T_i$ ; y es independiente del valor de la ganancia del controlador y de la magnitud del escalón.*

Lo que coincide con lo enunciado al describir la acción integral, en el apartado 4.2.12.c (pág. 147).

La figura 5.12 muestra gráficamente el análisis que acabamos de realizar.

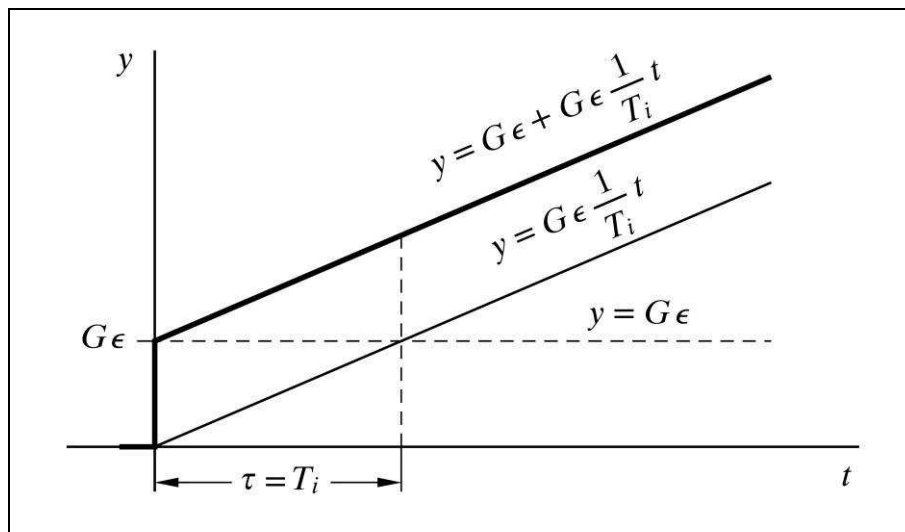


Fig. 5.12 Respuesta de un controlador PI al escalón de error

### Práctica nº 5.18

- Entrar en la opción *Controlador P+I*.
- Introducir los valores:
  - Escalón* = 10
  - Valor inicial* = 20
  - Duración* = 4
  - Ganancia* = 2
  - Tiempo integral* = 9999999 (prácticamente anulado)
- Ejecutar la gráfica para *Escalón*.

Es evidente que sin la acción integral (controlador P), la salida sería una rampa con la expresión

$$y = G R t$$

La figura 5.13 muestra una respuesta de un controlador PI, en donde la pendiente de la rampa de excitación es de 0,1, la ganancia del controlador es 1 y el tiempo integral 1.

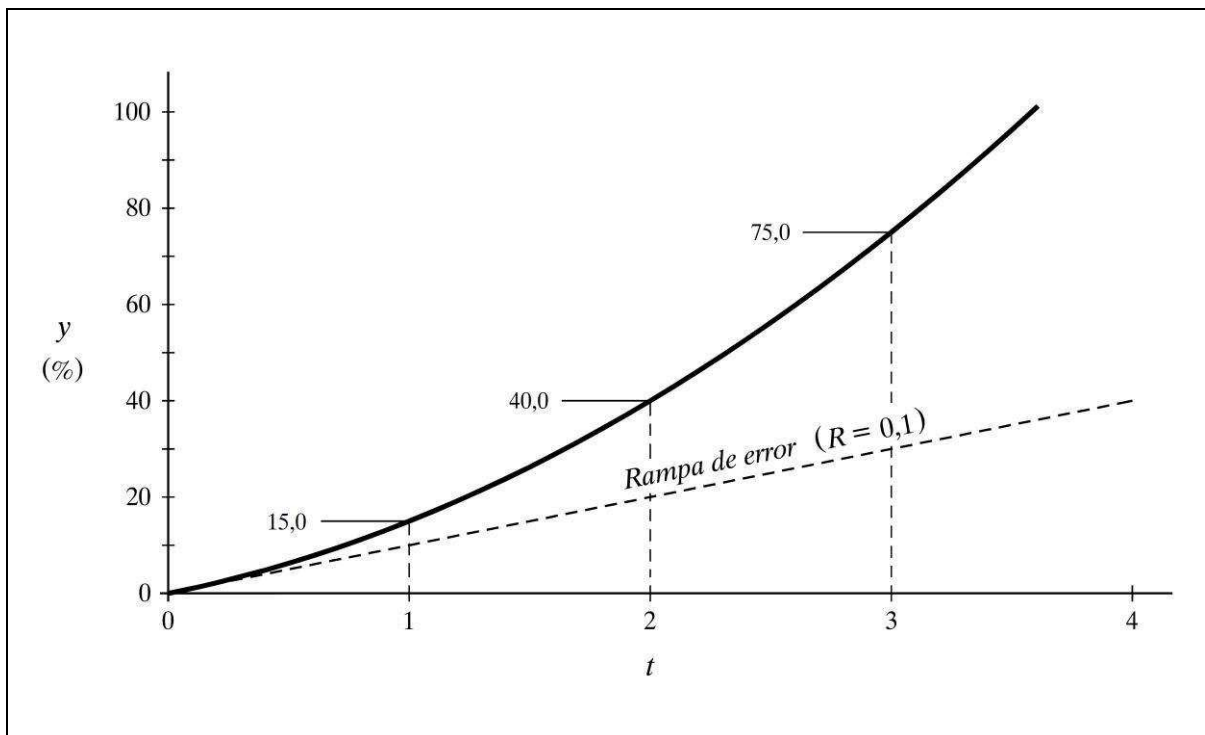


Fig. 5.13 Respuesta de un controlador PI a una señal de error en rampa

### Práctica nº 5.19

- Entrar en la opción *Controlador P+I*.
- Introducir los valores:
  - Rampa* = 0,1
  - Valor inicial* = 0
  - Duración* = 3
  - Ganancia* = 2
  - Tiempo integral* = 9999999 (prácticamente anulada la acción)
- Ejecutar la gráfica para *Rampa*.
- Modificar:
  - Ganancia* = 0,5



cuyo módulo sea la ganancia  $G=A_2/A_1$  y el ángulo sea  $\phi$ , de tal manera que se cumplirá

$$A_2 e^{j(\omega t + \phi)} = G e^{j\phi} A_1 e^{j\omega t}$$

es decir,

$$G e^{j\phi} = \frac{A_2 e^{j(\omega t + \phi)}}{A_1 e^{j\omega t}} = \frac{A_2}{A_1} e^{j\phi}$$

o en notación polar

$$A_2 \angle(\omega t + \phi) = G \angle\phi A_1 \angle\omega t$$

esto es,

$$G \angle\phi = \frac{A_2 \angle(\omega t + \phi)}{A_1 \angle\omega t} = \frac{A_2}{A_1} \angle\phi$$

sin olvidar, según se ha dicho, que  $G$  y  $\phi$  son funciones de  $\omega$ .

Así pues:

*La función de transferencia frecuencial o espectral expresa, para cada frecuencia, una magnitud compleja (y, por tanto, asimilable a un vector), la cual queda definida por un módulo y por un ángulo. El módulo indica la ganancia o relación entre las amplitudes de las senoides de salida y de entrada, y el ángulo indica el desfase angular entre las mismas.*

La notación utilizada para las funciones frecuenciales es  $(j\omega)$ , como por ejemplo  $G(j\omega)$ , por razones que se comprenderán más adelante.

Esencialmente, la *respuesta de frecuencia* de un componente o de un sistema se obtendría excitando su entrada con una onda senoidal que, lenta y progresivamente, efectuase un barrido comprendiendo una banda de frecuencias de interés, más o menos amplia. Para *cada frecuencia*, se iría anotando el *módulo* (o la *ganancia*) y el *ángulo de fase* de la respuesta obtenida (señal de salida).

Vemos que el concepto de respuesta de frecuencia coincide con el de función de transferencia frecuencial, por lo que ambos términos se consideran equivalentes.

Es preciso aclarar que la expresión *frecuencia*, usualmente se refiere a la *pulsación*, también llamada *frecuencia angular* (expresada en rad/segundo o rad/minuto), y no a la verdadera frecuencia, que se expresaría en ciclos/segundo (Hz) o bien en ciclos/minuto. La relación entre ambas es bien sabida:  $\omega = 2\pi f$ .

La *respuesta frecuencial* de un bloque o sistema deberá poder ser representada gráficamente de alguna manera en la que, para *cada frecuencia* dentro de una banda o intervalo, se muestre el *módulo* o *ganancia* y el *ángulo de fase* entre las señales de entrada y salida; lo que será reflejo de la *función de transferencia frecuencial*. Este es el objetivo principal de este capítulo.

### 6.2.1 Obtención de la respuesta frecuencial

La *función de transferencia frecuencial*, a la que comúnmente llamaremos *respuesta frecuencial* o *respuesta de frecuencia*, o también *respuesta espectral*, se obtiene directamente de la transmitancia operacional  $G(s)$ , simplemente *sustituyendo* en la misma la variable  $s$  por el producto  $j\omega$ . Se simbolizará por  $G(j\omega)$ , la cual será, por tanto, una función compleja de los parámetros del sistema y de la frecuencia. Es evidente ahora la razón por la cual se conviene en usar la notación  $(j\omega)$ .

Siendo  $G(j\omega)$  una magnitud compleja, diremos que  $|G(j\omega)|$  es su *módulo* y  $\angle G(j\omega)$  su *ángulo*, esto es

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle G(j\omega)$$

Por ejemplo, si para un retardo de primer orden tenemos la transmitancia

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

entonces la respuesta frecuencial será, sustituyendo  $s$  por  $j\omega$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$

en donde, anticipándonos un poco a lo que será visto con detalle, el módulo sería

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$$

y el ángulo

$$\phi = -\tan^{-1} \omega T$$

con lo que la función respuesta frecuencial la podemos expresar en forma polar, escribiendo

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$

La respuesta de frecuencia de un sistema formado por distintos componentes concatenados en serie se obtiene como el producto de los vectores representativos de cada una de las respuestas de frecuencia individuales (multiplicación de números complejos). Esto significa que el módulo global del conjunto será el producto de módulos y el ángulo la suma de ángulos. Esto es, si suponemos que dos bloques se hallan en serie, sin efecto interactivo, y con las respuestas de frecuencia individuales  $G_1(j\omega)$  y  $G_2(j\omega)$ , respectivamente (lo que puede hacerse extensivo a un número de bloques cualquiera), tendremos que la respuesta frecuencial conjunta será

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) G_2(j\omega)$$

es decir, que en notación polar

$$G(j\omega) = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \angle (\angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega))$$

o, en notación exponencial,

$$G(j\omega) = g_1 e^{j\phi_1} g_2 e^{j\phi_2} = g_1 g_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$$

en donde  $g_1$  y  $g_2$  son los valores de los respectivos módulos, y  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son los ángulos.

En conclusión, si definimos

$$g = g_1 g_2 ; \quad \phi = \phi_1 + \phi_2$$

tenemos

$$G(j\omega) = g \angle \phi = g e^{j\phi}$$

Puesto que el módulo de la respuesta de frecuencia es una ganancia, como resultado del cociente entre dos valores reales, podrá ser expresado, y en general así se hace, por su valor en decibelios.

### Nota importante

A partir de aquí simbolizaremos el *módulo* por la letra  $M$ , y a su *expresión en dB* la llamaremos *ganancia* y la simbolizaremos por  $G$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$$

Nótese que esta respuesta de frecuencia es la función inversa de la respuesta calculada cuando el factor analizado estaba en el numerador. El inverso de un número complejo vimos que es otro número complejo con un módulo de valor inverso al del original y con el mismo ángulo cambiado de signo (recuérdese también que la ganancia expresada en dB queda del mismo valor, pero cambiada de signo). Por tanto

$$M = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

$$G = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} = -10 \log (1 + \omega^2 T^2)$$

$$\theta = -\tan^{-1} \omega T$$

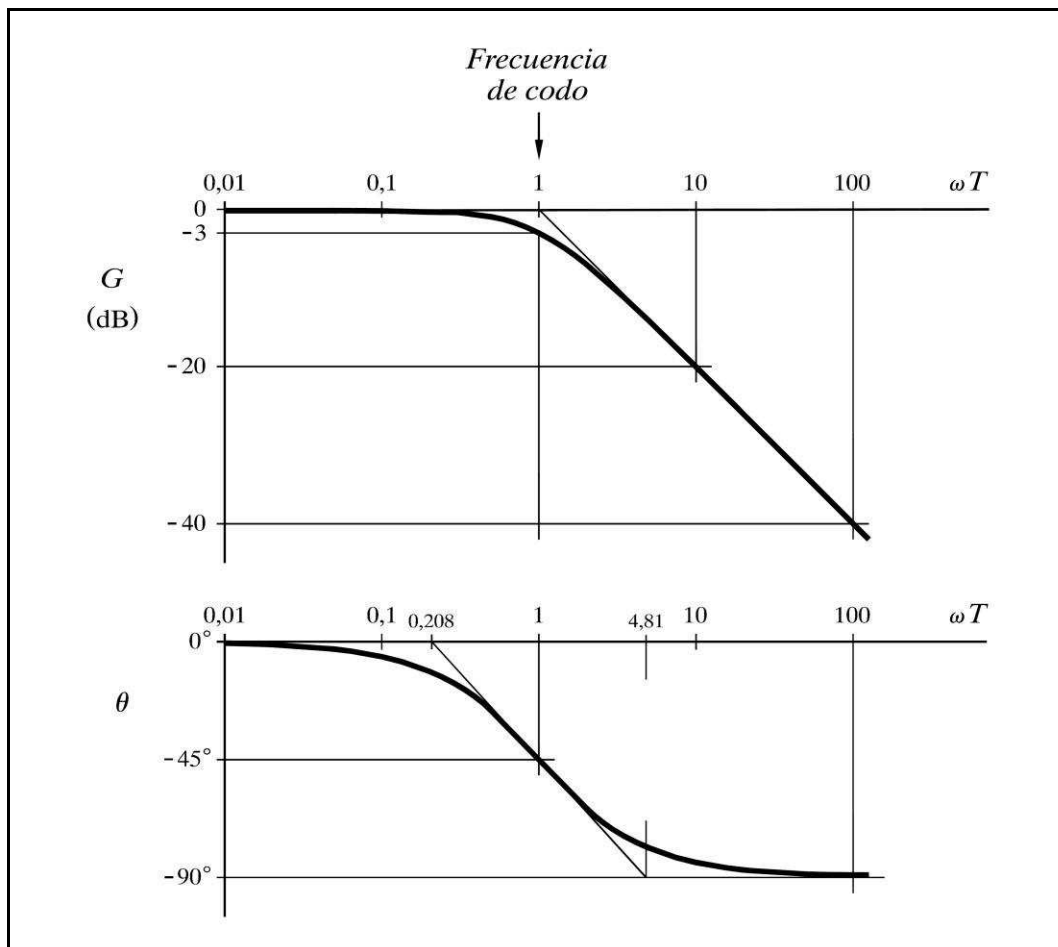


Fig. 6.9 Diagrama de Bode para  $G(j\omega) = 1/(j\omega T + 1)$

El lector debería realizar diversos cálculos de este tipo hallando la diferencia con la recta de 0 dB (ganancia), cuando la frecuencia es por debajo de la de codo, y la diferencia con su asíntota, cuando la frecuencia es por encima. (El valor de la asíntota para altas frecuencias lo hallará haciendo  $-20 \log \omega_o$ ). Resuelva concretamente en qué frecuencias las diferencias son de 1 dB y 2 dB. Notará la simetría entre los valores de las diferencias para separaciones de igual intervalo, por encima y por debajo de la frecuencia de codo. Finalmente, podrá construir una tabla como la mostrada a continuación, a la que le ha sido añadido el ángulo de la respuesta.

| Frecuencia<br>$\omega_o = \omega/\omega_c$ | Ganancia<br>[dB] | Valor asíntota<br>[dB] | Diferencia con<br>asíntota [dB] | Ángulo<br>[grados] |
|--|------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------|
| ▪ 0 (V.C.)                                 | ▪ 0              | ▪ 0                    | ▪ 0                             | ▪ 0                |
| ▪ 0,01 (-2 déc.)                           | -0,0004          | ▪ 0                    | -0,0004                         | -0,57              |
| ▪ 0,1 (-1 déc.)                            | -0,0432          | ▪ 0                    | -0,0432                         | -5,71              |
| ▪ 0,25 (-2 oct.)                           | -0,2633          | ▪ 0                    | -0,2633                         | -14,03             |
| ▪ 0,5 (-1 oct.)                            | -0,9691          | ▪ 0                    | -0,9691                         | -26,56             |
| 0,50885                                    | ▪ -1             | ▪ 0                    | ▪ -1                            | -26,97             |
| 0,76478                                    | ▪ -2             | ▪ 0                    | ▪ -2                            | -37,40             |
| ▪ 1 (frec. codo)                           | <b>-3,0103</b>   | ▪ 0                    | <b>-3,0103</b>                  | ▪ <b>-45</b>       |
| 1,22959                                    | ▪ -4             | -1,7952                | -2,2048                         | -50,88             |
| 1,30756                                    | -4,3292          | -2,3292                | ▪ -2                            | -52,59             |
| 1,96523                                    | -6,8682          | -5,8682                | ▪ -1                            | -63,03             |
| ▪ 2 (+1 oct.)                              | -6,9897          | -6,0206                | -0,9691                         | -63,43             |
| ▪ 4 (+2 oct.)                              | -12,304          | -12,041                | -0,2633                         | -75,96             |
| ▪ 10 (+1 déc.)                             | -20,043          | ▪ -20                  | -0,0432                         | -84,29             |
| ▪ 100 (+2 déc.)                            | -40,000          | ▪ -40                  | -0,0004                         | -89,43             |
| $\infty$ (M.A.F.)                          | $-\infty$        | $-\infty$              | ▪ 0                             | ▪ -90              |

**Notas:** El símbolo ▪ indica que el valor es exacto  
V.C. = Valor constante (p. ej., corriente continua)  
M.A.F. = Muy alta frecuencia (frecuencias grandes)

Valores singulares de la función retardo de primer orden  $G(j\omega) = 1/(1+j\omega T)$

Obsérvese que en la frecuencia de codo el ángulo se hace de  $-45^\circ$ , y nótese la simetría existente en torno a este valor en la columna “Diferencia con asíntota [dB]”, para separaciones de igual intervalo por encima y por debajo de dicha frecuencia.

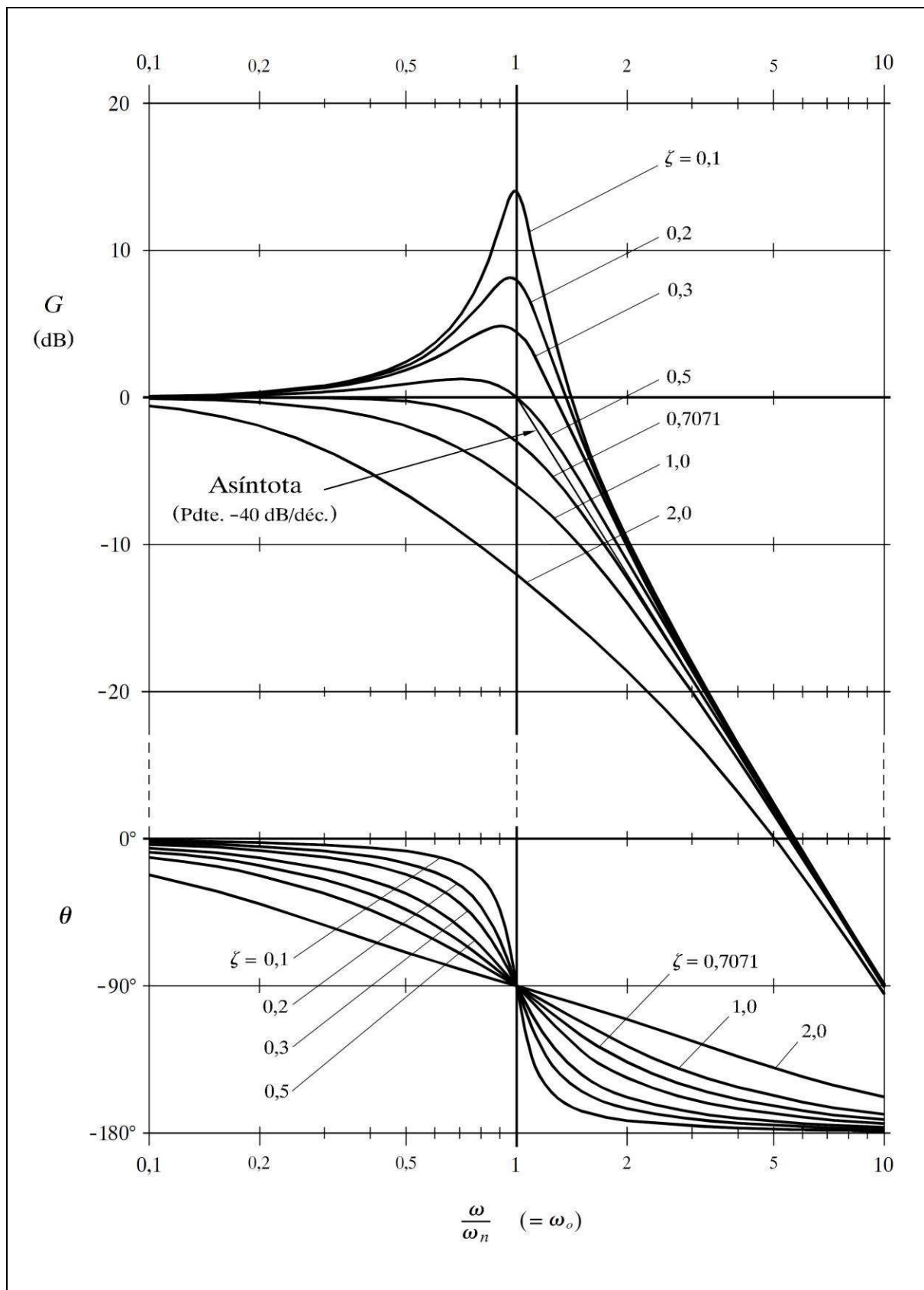


Fig. 6.13  
Gráficas de respuesta frecuencial de un retardo de segundo orden,  
representadas en un diagrama de Bode (ganancia  $G$  y ángulo  $\theta$ )

y para calcular el incremento  $\Delta w$  que corresponde a un incremento de  $\Delta\varphi = \pm\pi/2$  ( $\pm 90^\circ$ ), que son los valores en que cambiará el ángulo desde la frecuencia normalizada  $w = 0$  hasta las líneas de  $0^\circ$  y  $-180^\circ$ , haremos

$$\Delta w = \pm \frac{\pi}{2} \frac{-\zeta}{\ln 10} = \mp 0,682 \zeta$$

y de aquí, teniendo en cuenta que  $\omega = 10^w$ , se obtienen las fórmulas propuestas.

La figura 6.15 muestra un diagrama de Nyquist para diversos valores del factor de amortiguación  $\zeta$  y para  $T=1$ , con las marcas de frecuencia (flecha) en  $\omega = 1$ .

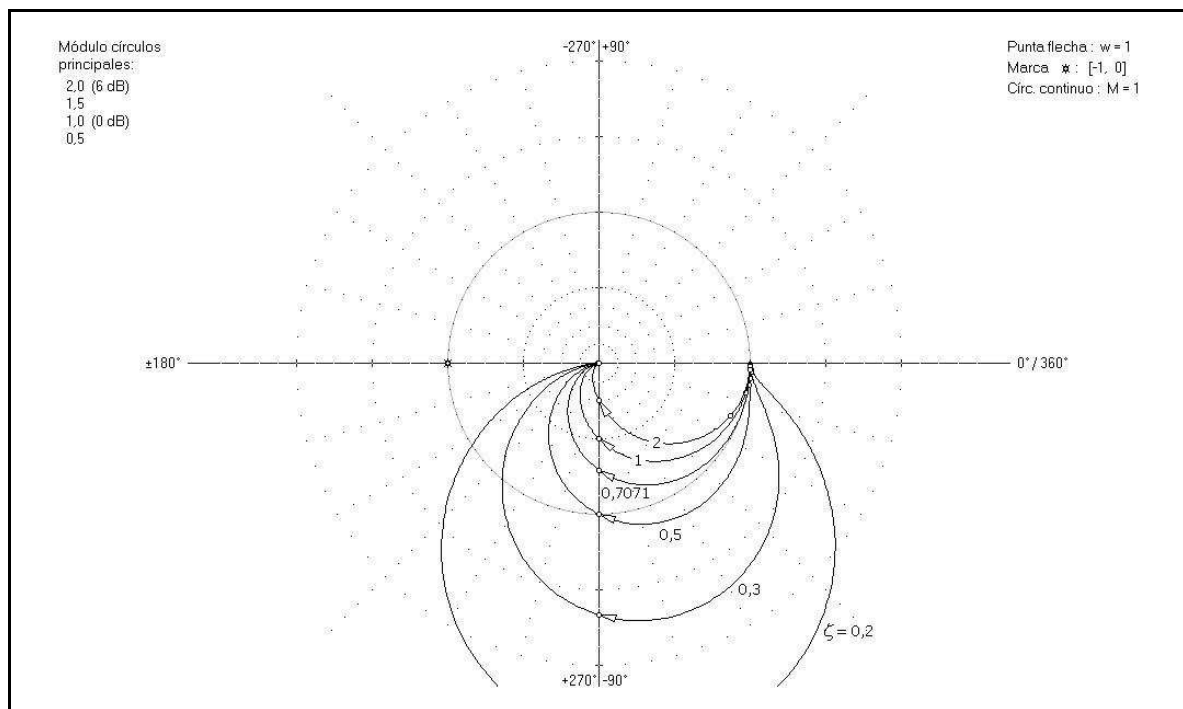


Fig. 6.15 Diagrama de Nyquist de un retardo de segundo orden

En este diagrama se aprecia el pico de resonancia (para  $\zeta < 0,7071$ ), el cual corresponde al punto de máxima distancia desde el origen (módulo máximo). Cuando no se tiene resonancia ( $\zeta > 0,7071$ ), las curvas no rebasan en ningún momento la circunferencia de módulo 1, y van acercándose al origen, a lo largo de su trazado, a medida que la frecuencia aumenta. Las curvas cortan al eje de  $-90^\circ$  en la frecuencia natural  $\omega_n$ .

Para valores de  $\zeta$  notablemente mayores que 1, la forma de la curva es similar a la que se tenía para un sistema de primer orden. Recuérdese que algo parecido sucedía con la respuesta temporal. Ahora se confirma que la respuesta de un retardo de segundo orden, compuesto por dos retardos de primer orden en serie con las constantes de tiempo muy dispares entre sí (lo que proporciona  $\zeta > 1$ ), es, a todos los efectos, similar a la del retardo de primer orden con la mayor de las constantes de tiempo. Se concluye que la constante de tiempo grande enmascara a la pequeña.

La figura 6.16 presenta la misma familia de curvas de la figura 6.15, representadas en un diagrama de Black.

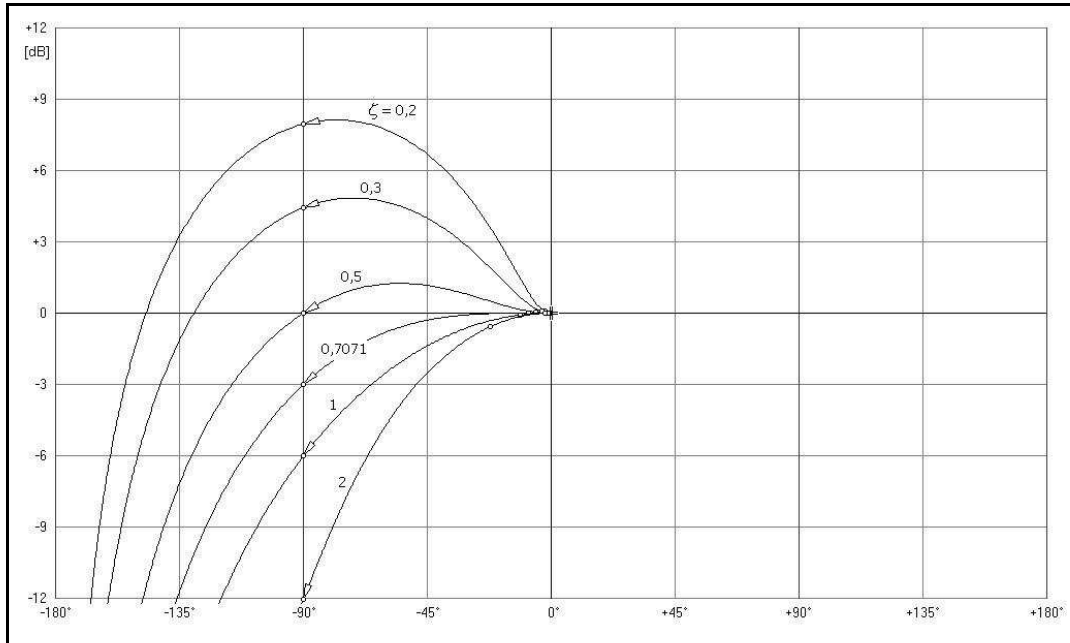


Fig. 6.16 Diagrama de Black de un retardo de segundo orden

## Práctica nº 6.2

- Entrar en el programa *ControlP* y seleccionar la opción *Retardo de segundo orden* del *MENÚ GENERAL*.
- Introducir los siguientes valores:
  - Constante de tiempo*  $T = 1$
  - Factor de amortiguación*  $S = 1$
- Seleccionar las siguientes escalas de trabajo:
  - Escala de ganancia* :  $0 \div 1000$ ;  $-60 \div +60$
  - Escala de ángulos* :  $-180 \div +180$
  - Frecuencia inicial* :  $0,001$ ;  $-3$
  - Frecuencia final* :  $1000$ ;  $+3$
- Ejecutar la gráfica para la opción *Frecuencial/Bode (F/B)*.
- Ejecutar nuevamente las gráficas para los siguientes valores del *Factor de amortiguación* =  $0,05$  y  $2$

Comprobar que en las regiones de *bajas* y *altas frecuencias* las respuestas obtenidas son prácticamente coincidentes; sólo hay importantes diferencias en las cercanías de la frecuencia natural o de codo ( $\omega = 1$ ,  $\log \omega = 0$ ), debido a la discrepancia entre los valores de  $\zeta$ , para cada una de las tres curvas.



$$\theta = \tan^{-1} \omega T_1 - \tan^{-1} \omega T_2 = \tan^{-1} \omega \alpha T - \tan^{-1} \omega T$$

La figura 6.18 muestra un diagrama de Bode de la respuesta para el caso *adelanto* ( $T_1=1; T_2=0,25; \alpha=4$ ) y para el caso *retardo* ( $T_1=0,25; T_2=1; \alpha=1/4$ ).

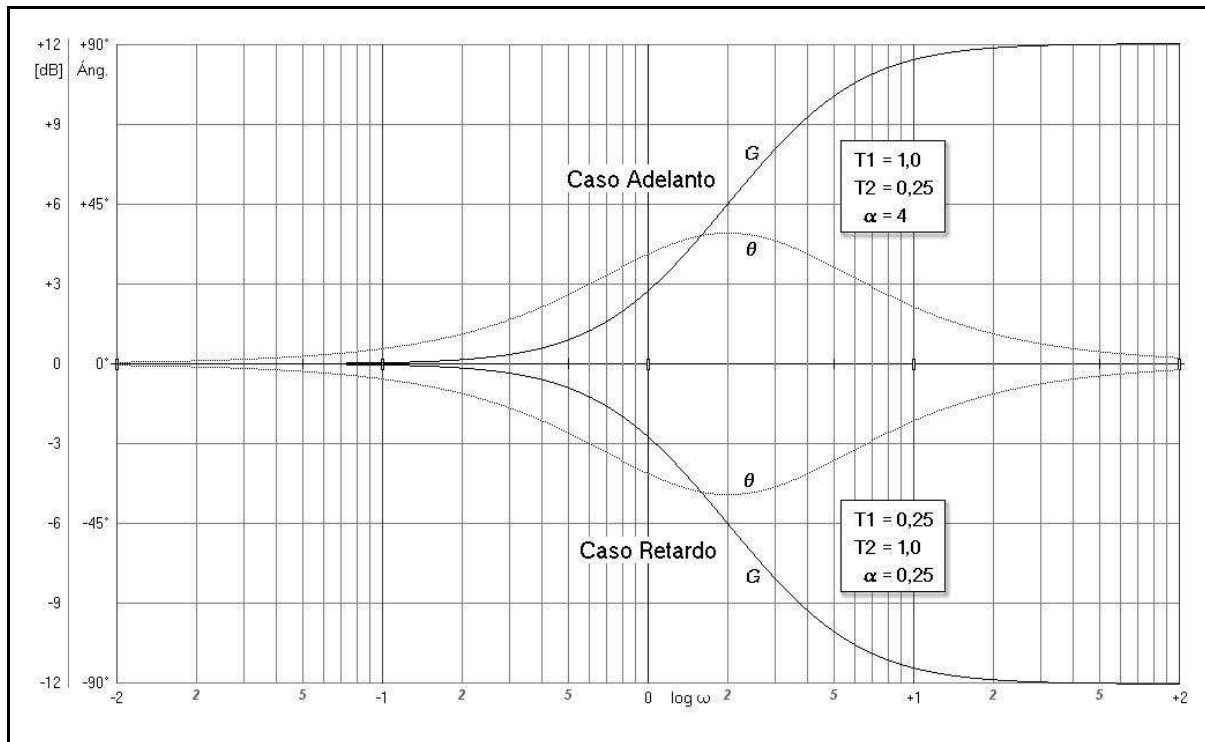


Fig. 6.18 Diagrama de Bode para un elemento adelanto-retardo

Veamos cuáles son los módulos, las ganancias y los ángulos para altas y bajas frecuencias, utilizando las fórmulas que acabamos de deducir.

Para *bajas frecuencias* ( $\omega \ll 1/T$ ) tenemos las siguientes aproximaciones

$$M \approx 1$$

$$G \approx 20 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

$$\theta \approx \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} 0 = 0$$

Para *altas frecuencias* ( $\omega \gg 1/T$ ) tendremos

$$M \approx \alpha$$

$$G \approx 20 \log \alpha$$

$$\theta \approx \tan^{-1} \infty - \tan^{-1} \infty = 0$$

Nótese que para valores de  $\alpha$  recíprocos entre sí, la magnitud del ángulo  $\theta$  tiene el mismo valor pero cambiado de signo. Se verá más fácilmente con un ejemplo, que corresponde a la figura 6.18:

Para  $\alpha = 4$ : 
$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{4} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{4}} = 36,87^\circ$$

Para  $\alpha = 1/4 = 0,25$ : 
$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{0,25} - \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{0,25}} = -36,87^\circ$$

En realidad puede generalizarse que, para valores de  $\alpha$  recíprocos entre sí, tanto las curvas de ganancia como las del ángulo son simétricas respecto a la línea de 0dB y de  $0^\circ$ , si se dibujan tipificadas, tomando a  $\omega T \sqrt{\alpha} = \omega \sqrt{T_1 T_2}$  como unidad de frecuencia.

La figura 6.19 muestra el *diagrama de Nyquist* para el caso *adelanto* ( $T_1 = 2$ ;  $T_2 = 1$ ;  $\alpha = 2$ ) y el caso *retardo* ( $T_1 = 0,5$ ;  $T_2 = 1$ ;  $\alpha = 0,5$ ).

Puede demostrarse que las gráficas son semicircunferencias. Los valores extremos de las mismas parten del módulo  $M = 1$ , para  $\omega = 0$ , y terminan, para  $\omega \rightarrow \infty$ , en el valor del módulo correspondiente a esta frecuencia, que según vimos es  $M = \alpha$ , siendo el ángulo nulo en todos los casos.

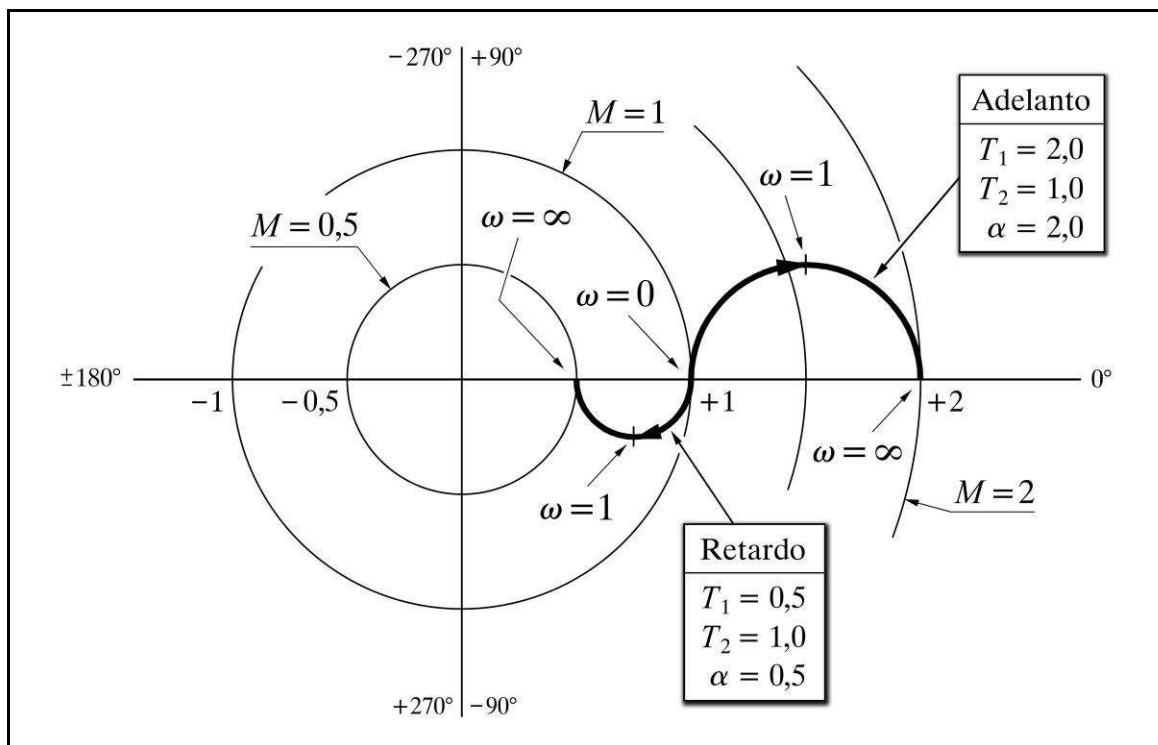


Fig. 6.19 Diagrama de Nyquist para un elemento adelanto-retardo

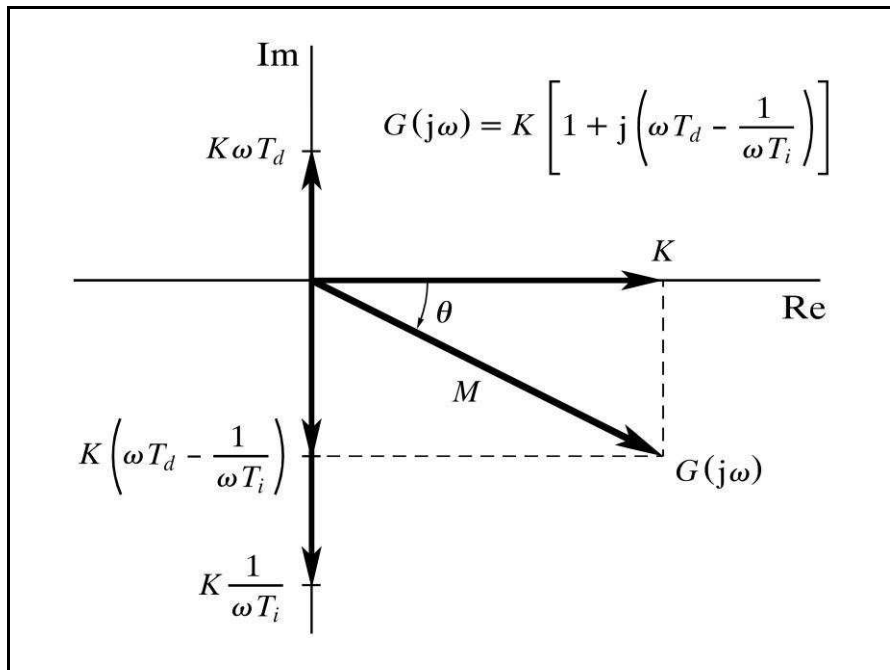


Fig. 6.24 Composición del vector  $K[1+j(\omega T_d - 1/\omega T_i)]$

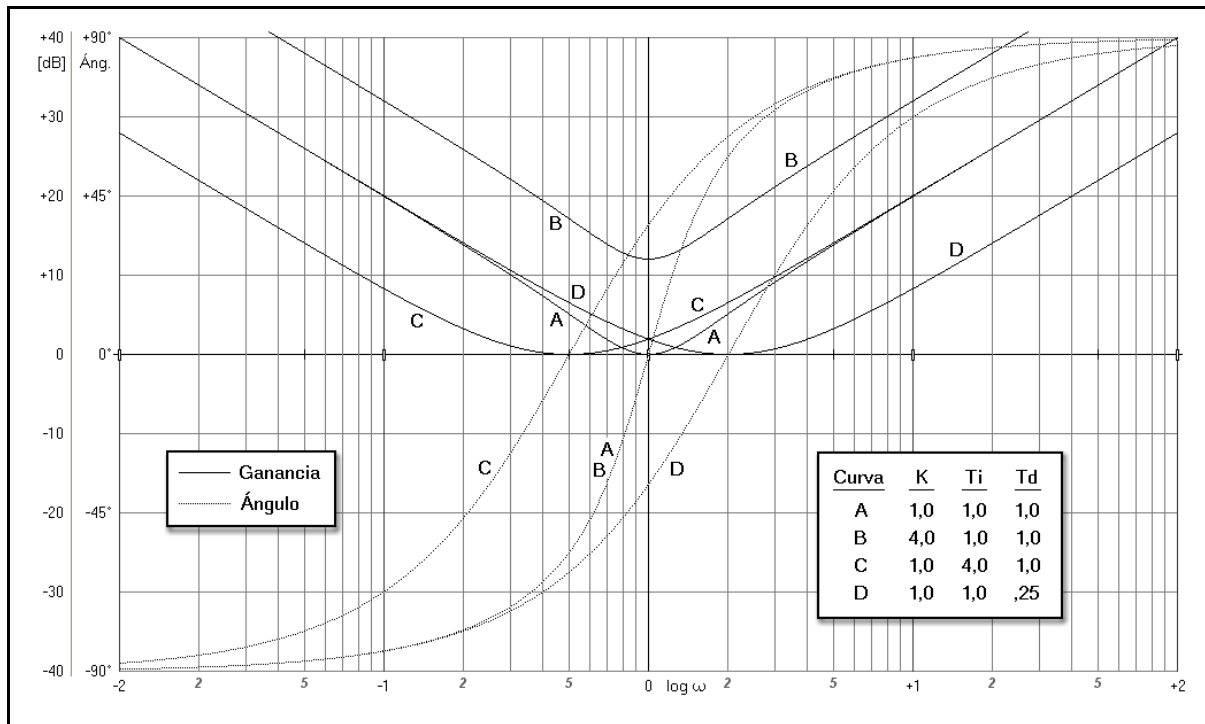


Fig. 6.25 Diagrama de Bode de un controlador P+I+D

Como veremos más adelante, es perfectamente admisible desde el punto de vista teórico, aunque raro en su aplicación práctica, que se produzca el caso  $T_i < T_d$ , en el que las frecuencias de codo se encontrarían en posición intercambiada (transpuestas), sin dejar lugar para la región media, ya que entonces se tendrá  $\omega_{ci} > \omega_{cd}$ .

El lector puede comprobar fácilmente que en el primer caso, aun manteniendo la señal de excitación  $c(t)$ , el sistema responde con una amplitud de valor finito. En efecto, supongamos que la ganancia en amplitud del bloque proceso a la frecuencia  $\omega_c$  es de 0,9 y téngase presente la inversión de fase. Si asignamos el valor 1 a la amplitud de la señal de entrada, la amplitud de la senoide de salida  $m(t)$  en estado estacionario se estabilizaría en 9, puesto que la amplitud de la señal de error  $e(t)$  sería de  $1 - (-9) = 10$ , lo que a su vez generaría una señal a la salida del bloque proceso de  $10 \times 0,9 = 9$ , según se había propuesto. Cualquier desviación en torno a estos valores hará que el sistema reaccione, gracias a su realimentación, restableciendo el citado estado de equilibrio. Efectúe el lector la prueba de aumentar o disminuir el valor de salida, por ejemplo a 10 y a 8, respectivamente. A continuación recalculé varias veces los nuevos valores para las diversas señales, y confirmará que en ambos casos se converge hacia el estado de equilibrio propuesto.

La relación de amplitudes entre la salida y la entrada a la frecuencia crítica, con la realimentación desconectada, es precisamente el módulo de la respuesta frecuencial en *lazo abierto*, a dicha frecuencia; esto es, el producto de los módulos de cada uno de sus componentes. De aquí que podamos hacer la siguiente declaración:

*Llamando frecuencia crítica aquella en que la respuesta de frecuencia en lazo abierto muestra un ángulo de fase de  $-180^\circ$ ; si el módulo del lazo para dicha frecuencia es menor que la unidad (ganancia en dB negativa), el sistema será estable; si es mayor (ganancia en dB positiva), el sistema será inestable; y si es igual (ganancia 0dB), se estará en una situación o condición crítica (límite de estabilidad).*

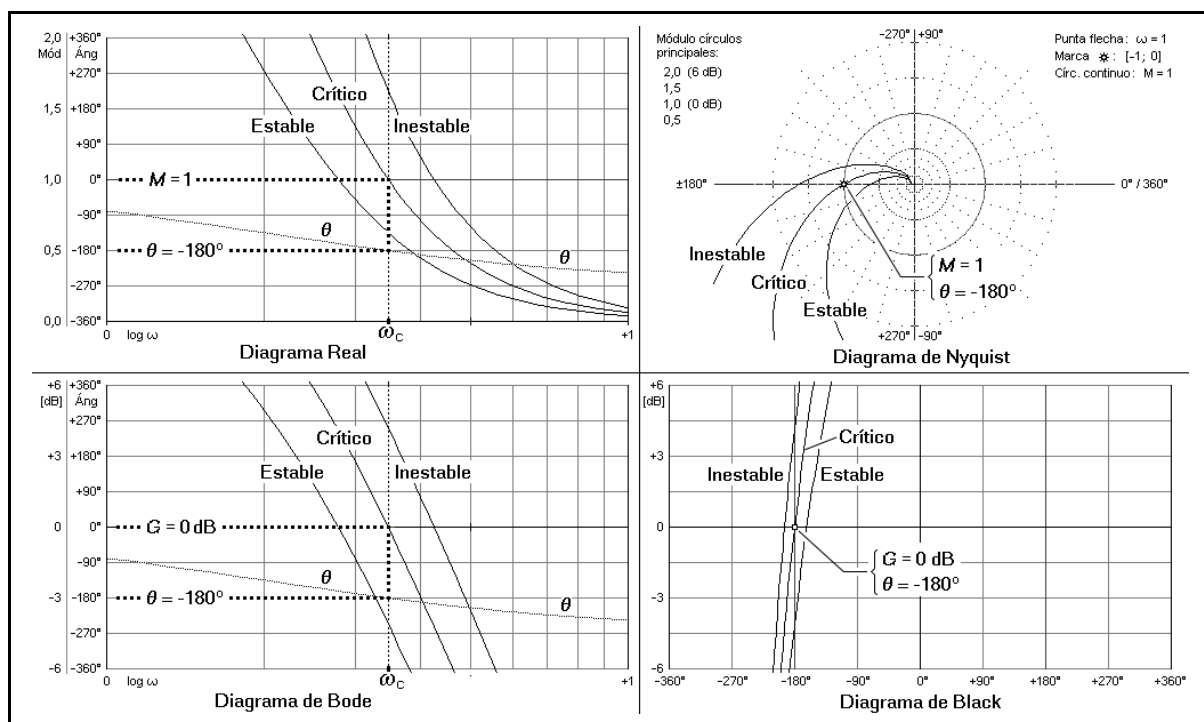


Fig. 7.4 Respuestas de frecuencia típicas de tres procesos, uno estable, uno crítico y otro inestable

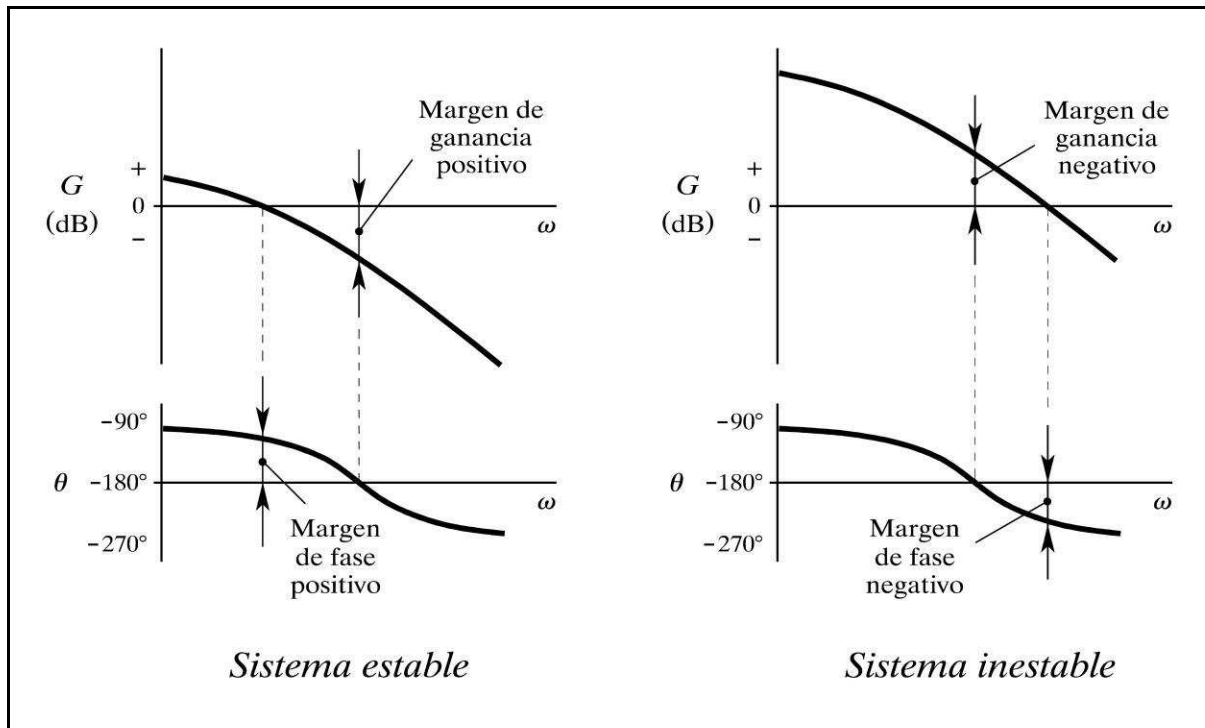


Fig. 7.5 Interpretación gráfica de los márgenes de ganancia y de fase en un diagrama de Bode

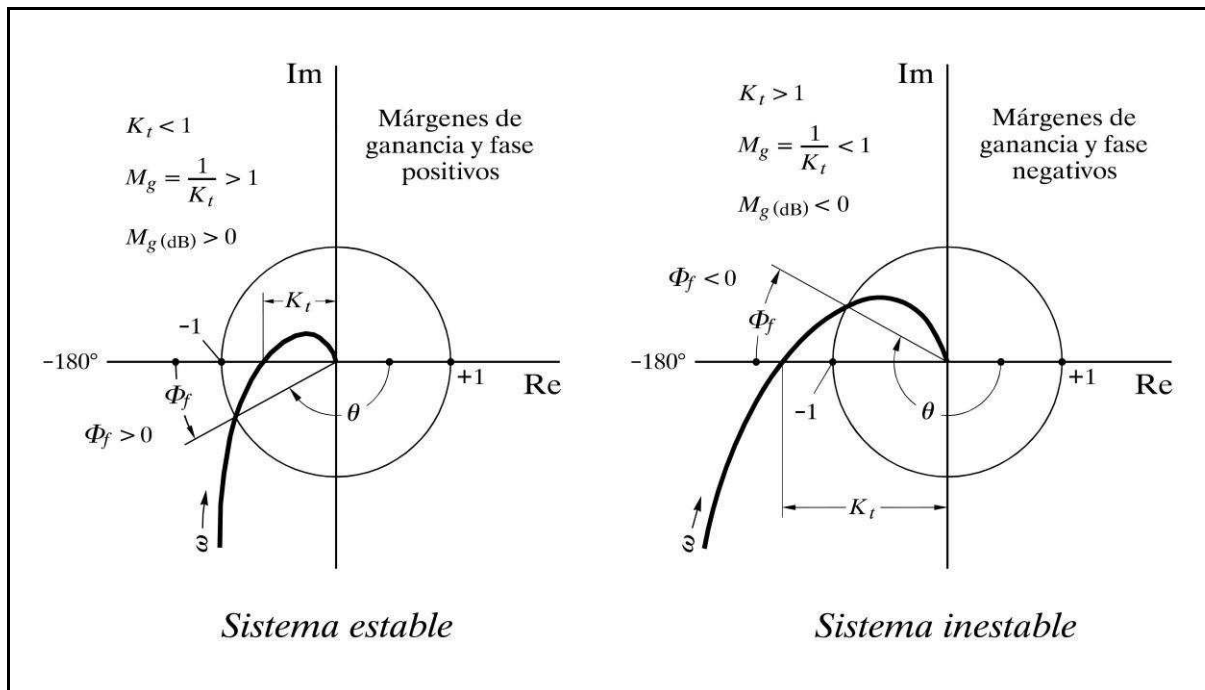


Fig. 7.6 Interpretación gráfica de los márgenes de ganancia y de fase en un diagrama de Nyquist

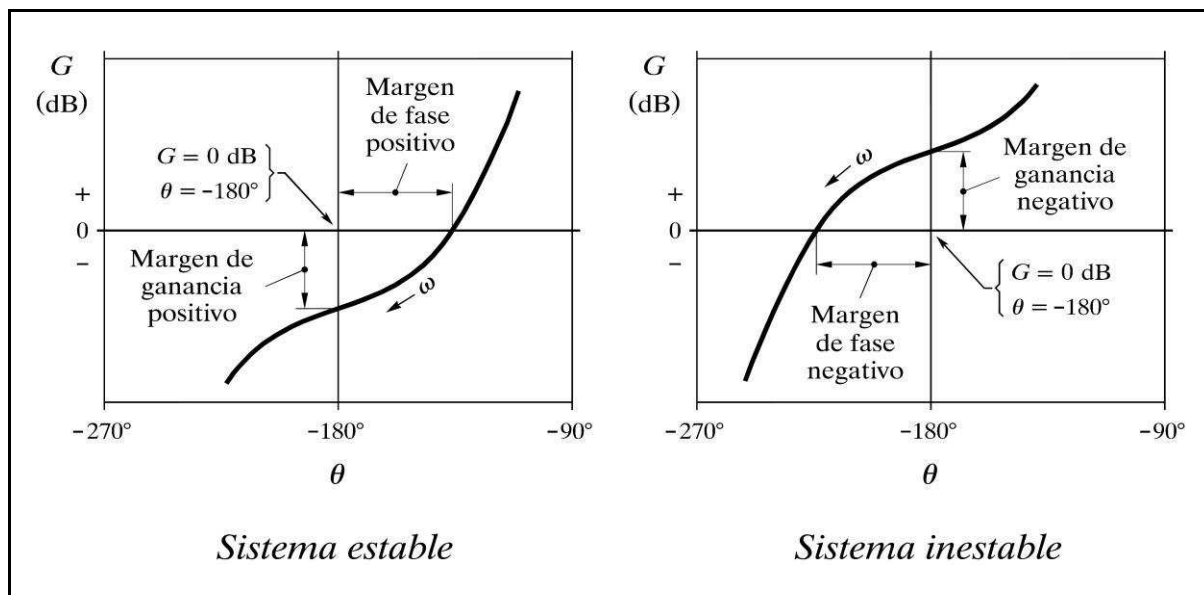


Fig. 7.7 Interpretación gráfica de los márgenes de ganancia y de fase en un diagrama de Black

Según podremos comprobar más adelante, la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas del sistema queda comprendida entre la frecuencia crítica y la de cruce de ganancia. Este aspecto debe ser relacionado con los conceptos de frecuencia natural y frecuencia amortiguada, que se estudiaron en apartado 5.3.1 (pág. 182), referentes a la respuesta de un retardo de segundo orden. En general, se tiene que la *frecuencia crítica*  $\omega_c$  se corresponde con la *frecuencia natural*  $\omega_n$ , que sería la frecuencia de las oscilaciones mantenidas de un sistema si se modificase su factor de amortiguación haciéndolo nulo ( $\zeta = 0$ ); mientras que cuando el sistema es subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ ) la frecuencia real de las oscilaciones la llamábamos *frecuencia amortiguada*, la cual vimos que era  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta}$ . Obviamente, se cumplirá siempre que  $\omega_d < \omega_n$ , lo que es coherente con el hecho de que, para un sistema subamortiguado, tanto la frecuencia de cruce de ganancia como la de las oscilaciones son también menores que la frecuencia crítica. Cuando  $\zeta = 0$  (el sistema es crítico), *coinciden* las cinco frecuencias de las que se viene hablando, es decir, las frecuencias *crítica, natural, oscilatoria, amortiguada y de cruce de ganancia*.

### 7.6.1 Ejemplo de cálculo de los márgenes de ganancia y de fase

Las figuras 7.8 y 7.9 muestran el diagrama de Bode y el de Nyquist, respectivamente, de un proceso estable, cuyas gráficas de respuesta nos permiten establecer la ganancia máxima que podríamos asignar al controlador para llevar el sistema al límite de la estabilidad, es decir, para hacerlo crítico. En efecto, observamos que en la frecuencia en que la curva del ángulo se hace de  $-180^\circ$  (a la frecuencia crítica  $\omega_c = 2,6$ ), la ganancia total  $K_t$  del lazo es de  $-3,2$  dB. (Las opciones Crítica y Cruce del programa *ControlP* nos darían los valores exactos). Expresado en módulo, esto es

$$K_t = 10^{-3,2/20} \approx 0,69$$

y, por tanto, el *margen de ganancia* será

$$M_g = \frac{1}{0,69} \approx 1,45$$

lo que nos permitiría calcular la ganancia máxima del controlador

$$K_{c,max} = 1,45 K_c$$

es decir, que podríamos ir aumentando la ganancia del controlador hasta un valor de 1,45 veces mayor que la actual, antes de hacer el sistema crítico.

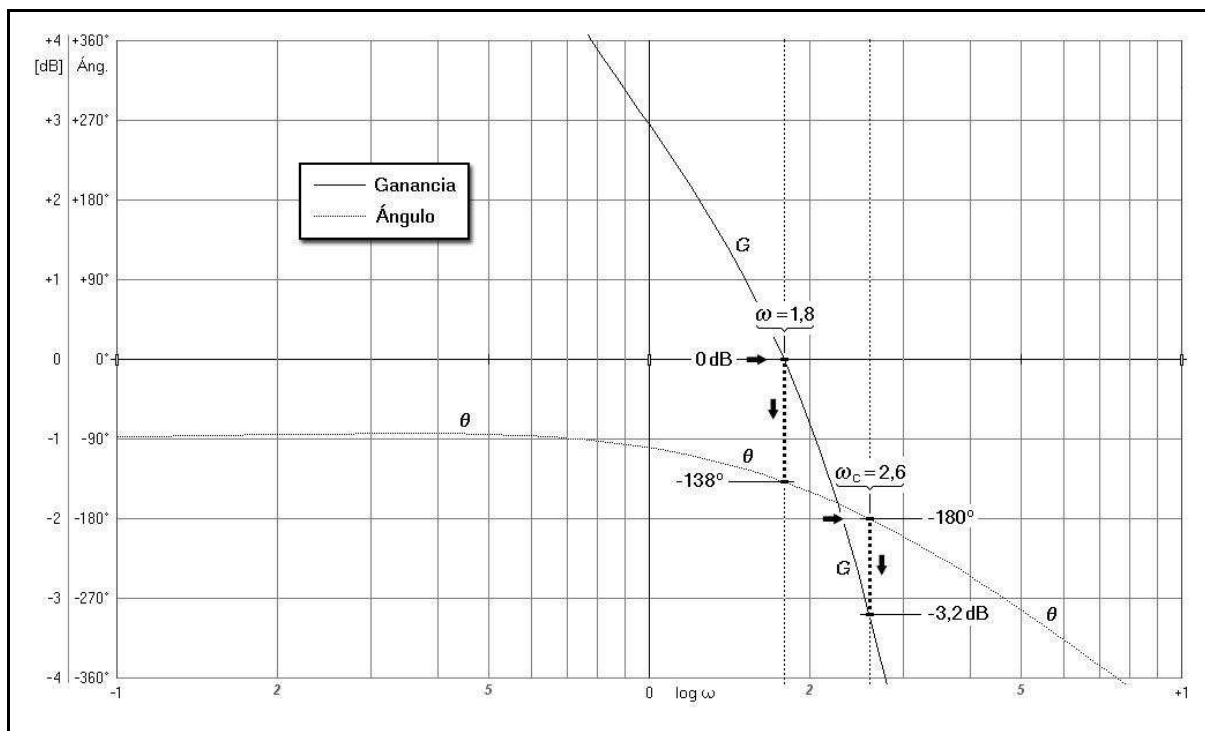


Fig. 7.8  
Cálculo del margen de ganancia y del margen de fase en un sistema estable, basado en el diagrama de Bode

El ángulo a la frecuencia de cruce de ganancia (cuando la ganancia vale 0dB o el módulo vale 1, a la frecuencia  $\omega = 1,8$ ) podemos leer que aproximadamente es de  $-138^\circ$ , y, por tanto, tendremos que el *margen de fase* vale

$$\Phi_f = 180 + (-138) = 42^\circ$$

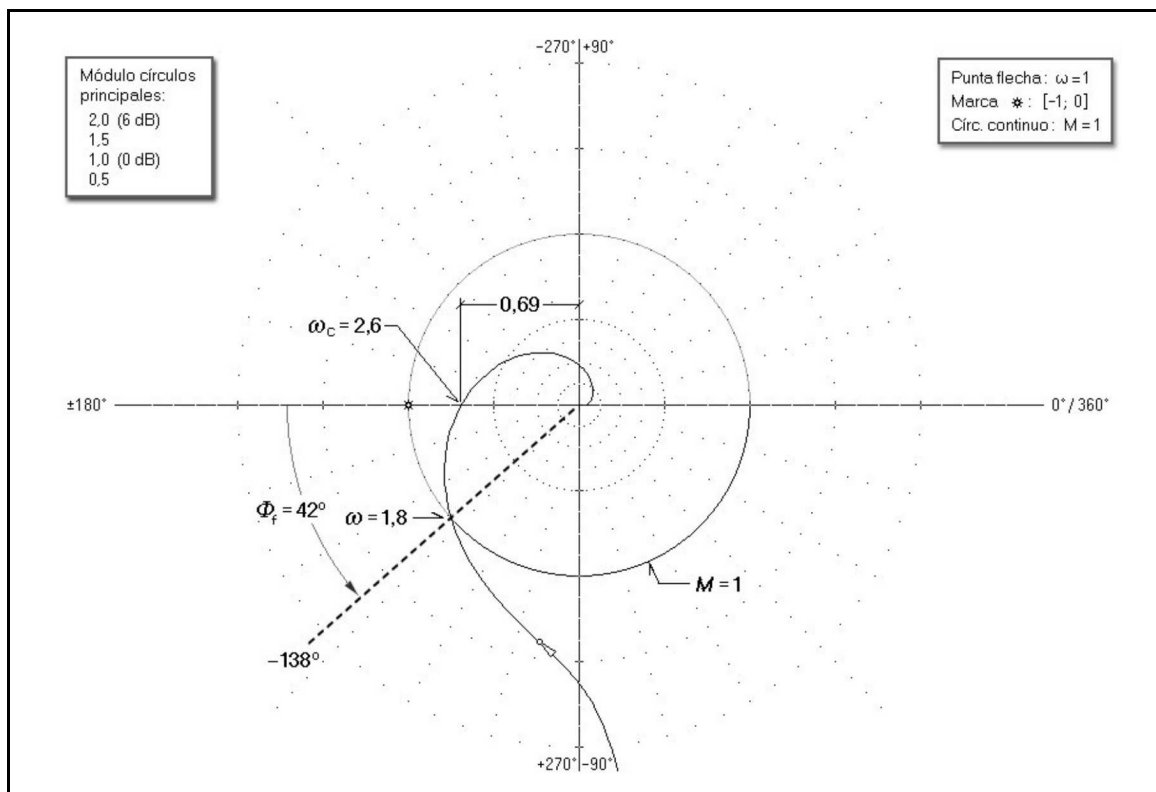


Fig. 7.9 Cálculo del margen de ganancia y del margen de fase en un sistema estable, basado en el diagrama de Nyquist

En el diagrama de Bode de la figura 7.8, es también posible leer tanto la frecuencia crítica como la frecuencia de cruce de ganancia, cuyos valores aparecen ser de 2,6 y 1,8 rad/mn., respectivamente. Más adelante se efectuarán diversos ejercicios prácticos relacionados con estos temas.

## 7.7 Criterios de estabilidad

Existen una serie de *criterios* para determinar, mediante análisis matemáticos, la estabilidad de un sistema, los cuales requieren el conocimiento de las funciones de transferencia de cada uno de los componentes del mismo. Entre ellos se encuentran el *criterio de Routh* y el *criterio de Hurwitz*. Aquí no serán estudiados, por salirse de los objetivos de esta obra, que pretende dar un enfoque más bien práctico e intuitivo, que no riguroso, del estudio del control automático. El lector que desee profundizar en estos temas, puede consultar las obras citadas en la bibliografía. También, en este caso, será recomendable que estudie el denominado *método del lugar geométrico de las raíces*, el cual, basándose en el conocimiento de las transmitancias de los componentes de un sistema, analiza el fenómeno de la estabilidad.

Sin embargo, presentaremos una visión bastante detallada del *criterio de estabilidad de Bode* y del *criterio de estabilidad de Nyquist*; con lo que justificaremos con algo más de rigor las conclusiones a las que habíamos llegado previamente, por una vía más bien intuitiva.



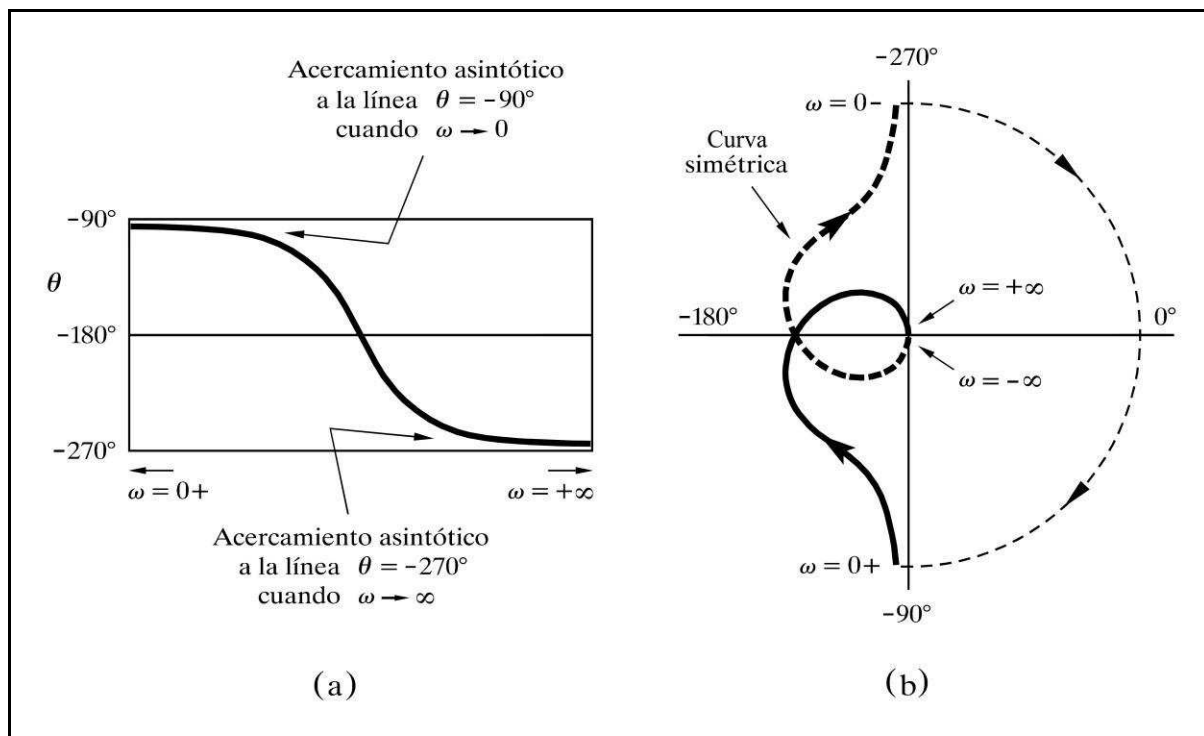


Fig. 7.12 Construcción de la curva simétrica y anotación de las marcas de frecuencias

- Indicar los puntos correspondientes a las frecuencias  $\omega = 0+$  y  $\omega = +\infty$  (extremos de la curva). Cuando el extremo de la trayectoria correspondiente a  $\omega = 0$  apunte hacia fuera del dibujo (asintóticamente a un semieje y, por tanto, de módulo infinito), la anotación se efectuará cerca del extremo de la curva, distinguiendo claramente por qué lado del eje hace la aproximación asintótica.
- Dibujar sobre la propia curva, una o varias flechas que señalen la dirección creciente de la frecuencia. El programa *ControlP* así lo hace, dibujando una flecha, justamente con su extremo señalando el punto cuya frecuencia es  $\omega = 1$ .
- Completar la mitad simétrica de la curva, con respecto al eje real, correspondiente al intervalo de frecuencias negativas desde 0 a  $-\infty$ .
- El punto simétrico al que ha sido marcado como  $\omega = 0+$  se señalará como  $\omega = 0-$ , y el simétrico de  $\omega = +\infty$  se anotará como  $\omega = -\infty$ .
- Las flechas que se dibujen sobre esta segunda curva *no son* simétricas con las dibujadas en la rama de frecuencias positivas; sino que estarán invertidas, señalando en la misma dirección dentro de la trayectoria global que forman ambas curvas, al ser recorridas desde  $\omega = 0+$  hasta  $\omega = 0-$ .

5. Ahora hay que cerrar la curva sobre sí misma. Esto se llevará a cabo dibujando un arco de circunferencia, con línea de trazos, que una el extremo marcado  $\omega = 0^-$  con el extremo marcado  $\omega = 0^+$ , respetando exactamente este orden y *girando en sentido horario* (teóricamente el radio sería infinito).

Sin embargo, previamente se habrá tenido que determinar si el arco que se va a trazar es el mínimo que satisfaga la unión de los extremos mencionados, o bien hay que dar alguna vuelta completa adicional. Concretamente, hay que determinar es el *número de vueltas* del arco de unión, para lo cual es preciso efectuar las consideraciones que se indican a continuación.

Cuando el denominador de la función de transferencia del sistema en lazo abierto contiene un *factor* del tipo  $s^n$  ( $n$  entero positivo), significa que el lazo contiene  $n$  componentes del tipo integrador (incluida la acción integral del controlador), puesto que la transmitancia de un bloque de este tipo, al margen de cualquier otro factor, es  $1/s$ . Pues bien, el *arco de unión* que tratamos de determinar será de  $n$  *semivuelatas*.

Un bloque *controlador P+I* genera un factor de este tipo en el denominador de la transmitancia del sistema que lo contiene (o incrementa su grado en una unidad), debido a que la transmitancia de dicho bloque,  $1+(1/T_i s)$ , puede expresarse como  $(1+T_i s)/T_i s$ .

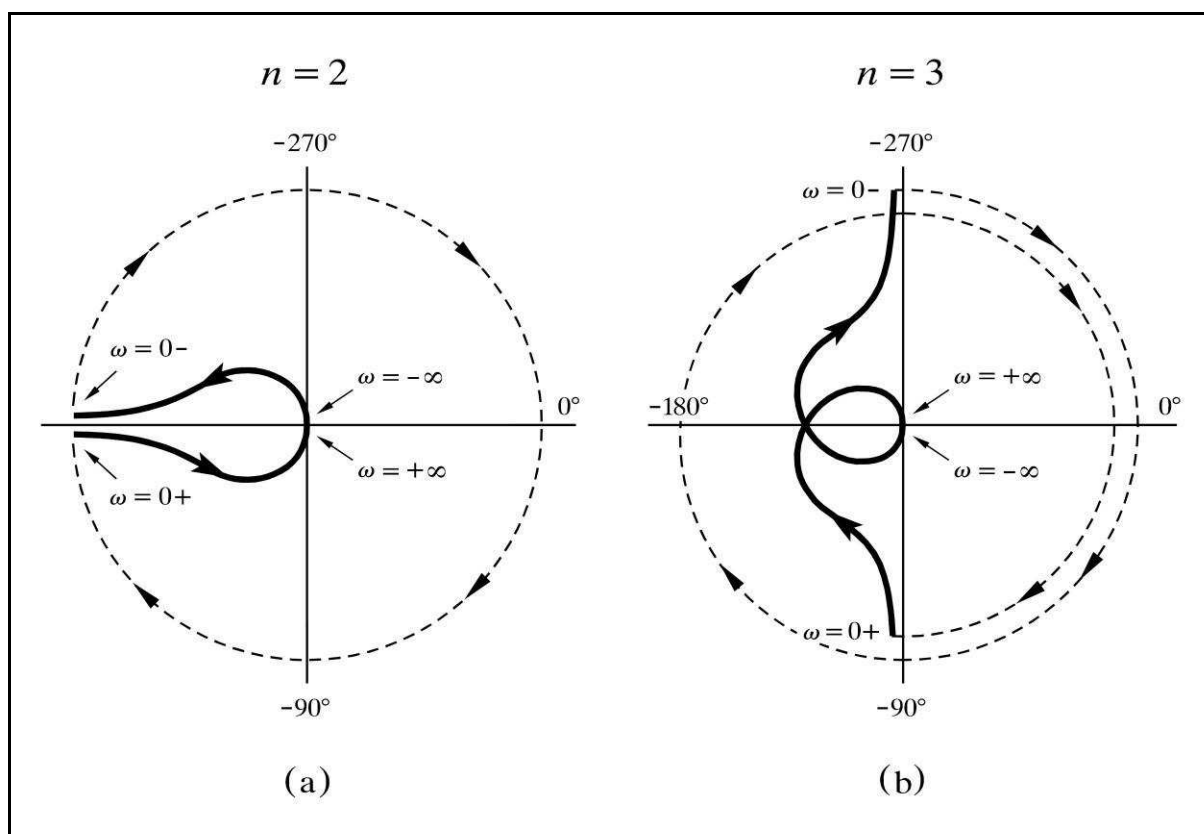


Fig. 7.13 Forma de cerrar las curvas del diagrama de Nyquist

tando desde dicho punto, y a modo de puntero, señale a un punto cualquiera de la curva. Entonces, tal como si se tratara de la manecilla de un reloj (de los de antes, claro), se irá recorriendo la curva *en su totalidad*, siguiendo el sentido de la flecha dibujada sobre la misma. Durante esta operación se habrá llevado la cuenta del número de *vueltas netas* que se han dado desde el inicio hasta la terminación del recorrido sobre el mismo punto de partida.

Se tendrá en cuenta si el resultado final neto ha sido de giro a *derechas* o a *izquierdas*. Las vueltas o rodeos a *derechas* (en el sentido de las agujas del reloj) se considerarán *positivas*, y las vueltas a *izquierdas* (en sentido contrario) se contarán como *negativas*. Por ejemplo, cada vez que se pase por las 12 horas en sentido a derechas se incrementará la cuenta, y si es en sentido a izquierdas se decrementará.

8. Llamaremos:

$P = \text{Número de polos positivos}$   
(de acuerdo con el punto 6)

$N = \text{Número de rodeos netos}$   
(positivo si lo han sido a derechas)  
(negativo si lo han sido a izquierdas)

9. Entonces haremos:

$$Z = P + N$$

10. Y según sea el valor que resulte de  $Z$  tendremos:

$Z = 0$  : El sistema es *ESTABLE*

$Z > 0$  : El sistema es *INESTABLE*

La figura 7.14 muestra cuatro ejemplos. En *a*) el punto  $[-1; 0]$  no es rodeado por la curva; es decir,  $N=0$  y, por tanto, puesto que no hay polos positivos,  $P=0$ , se cumple  $Z=P+N=0+0=0$ ; luego el sistema es estable. En *b*) la curva da dos rodeos a derechas; luego  $N=2$ , y como  $P=0$ , tenemos  $Z=0+2=2$ , y el sistema es inestable. En *c*) se tiene un polo positivo, ya que el denominador de la función de transmitancia contiene un factor  $(Ts-1)$  y, por tanto,  $P=1$ ; por otra parte hay un rodeo de una vuelta a izquierdas, con lo que  $N=-1$ , y entonces  $Z=1-1=0$ ; en consecuencia el sistema es estable. En *d*) se tiene el mismo sistema, pero con una ganancia menor; el punto  $[-1; 0]$  no está en la misma región, de tal manera que  $N=1$ , con lo que  $Z=1+1=2$  y, por tanto, el sistema es inestable. En estos casos el punto  $[-1; 0]$  siempre quedará dentro (a la derecha) del arco de circunferencia, puesto que su

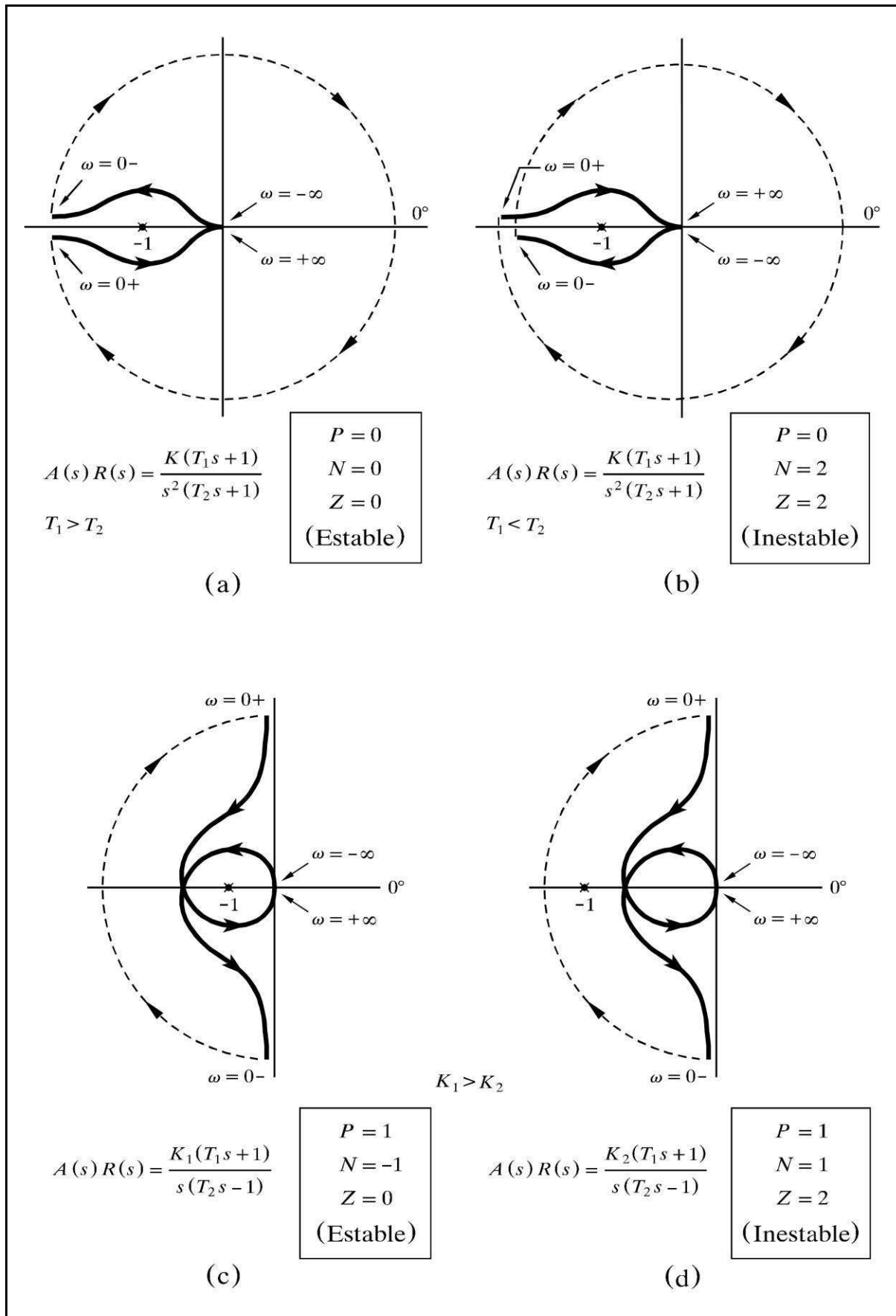


Fig. 7.14 Forma de cerrar las curvas del diagrama de Nyquist

seguimiento de los cambios bruscos de consigna. Realmente, indica el intervalo de frecuencias de una señal de consigna senoidal que es capaz de seguir con una *atenuación* de la amplitud menor de 3dB; es decir,  $G > -3\text{dB}$  o  $M > 0,7071$ .

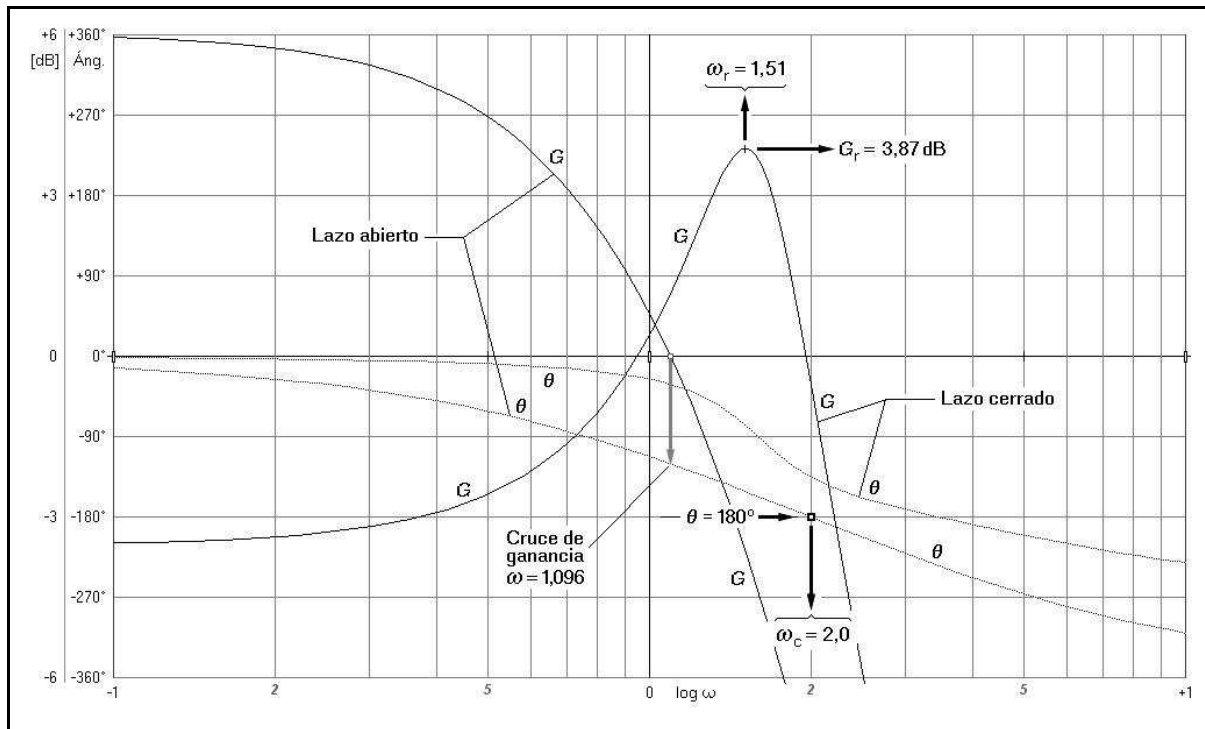


Fig. 7.16 Respuesta frecuencial en lazo abierto y en lazo cerrado del sistema representado en la figura 7.15 (Diagrama de Bode)

Cuando se obtiene una respuesta en *lazo cerrado* de un sistema se pueden considerar las siguientes correlaciones entre la respuesta frecuencial y la temporal:

- Cuanto mayor sea la frecuencia de pico de resonancia  $\omega_r$ , más rápida y enérgica será la respuesta temporal del sistema, frente a cambios de carga y del punto de consigna.
- La frecuencia de las oscilaciones en la respuesta temporal se corresponde con la frecuencia de pico de resonancia  $\omega_r$ , la cual se halla comprendida entre la frecuencia de cruce de ganancia (apartado 7.5.2, pág. 321) y la frecuencia crítica  $\omega_c$  (frecuencia de resonancia).
- El valor del pico de resonancia  $G_r$  (o su módulo  $M_r$ ) es indicativo del valor del sobreimpulso en la respuesta temporal.
- El valor del módulo para frecuencia cero (la asíntota a bajas frecuencias en lazo cerrado en un diagrama Real o de Bode) nos da el error estático (desviación permanente) de la respuesta temporal. Esto es, un módulo con valor unitario ( $M = 1$ ;  $G = 0 \text{ dB}$ ) indica que no habrá desviación permanente.

## 7.9 Manejo de las perturbaciones

Puesto que a partir de ahora estaremos constantemente interesados en analizar los efectos que causan las perturbaciones y los cambios de carga, procederemos, antes que nada, a estudiar la forma de analizarlas e introducirlas en los diagramas de bloques.

Para ello empezaremos con un ejemplo. Supóngase un tanque perfectamente agitado (fig. 7.17.a), en el que el nivel es mantenido constante, y por el que circula un caudal de agua constante,  $q_a$ , cuya concentración  $c_1$  de un determinado producto (no reactivo) a la entrada es  $c_i$ . De momento mantenemos cerrada la válvula de control. En condiciones estacionarias la concentración a la salida será  $c_2 = c_1 = c_i$ . Si en un instante determinado la concentración de entrada sufre un incremento en escalón de  $\Delta c$ , y pasa a ser de  $c_1 = c_i + \Delta c$ , la concentración de salida ascenderá progresivamente, según una curva de crecimiento exponencial hasta alcanzar el valor final  $c_2 = c_i + \Delta c$  (fig. 7.17.b).

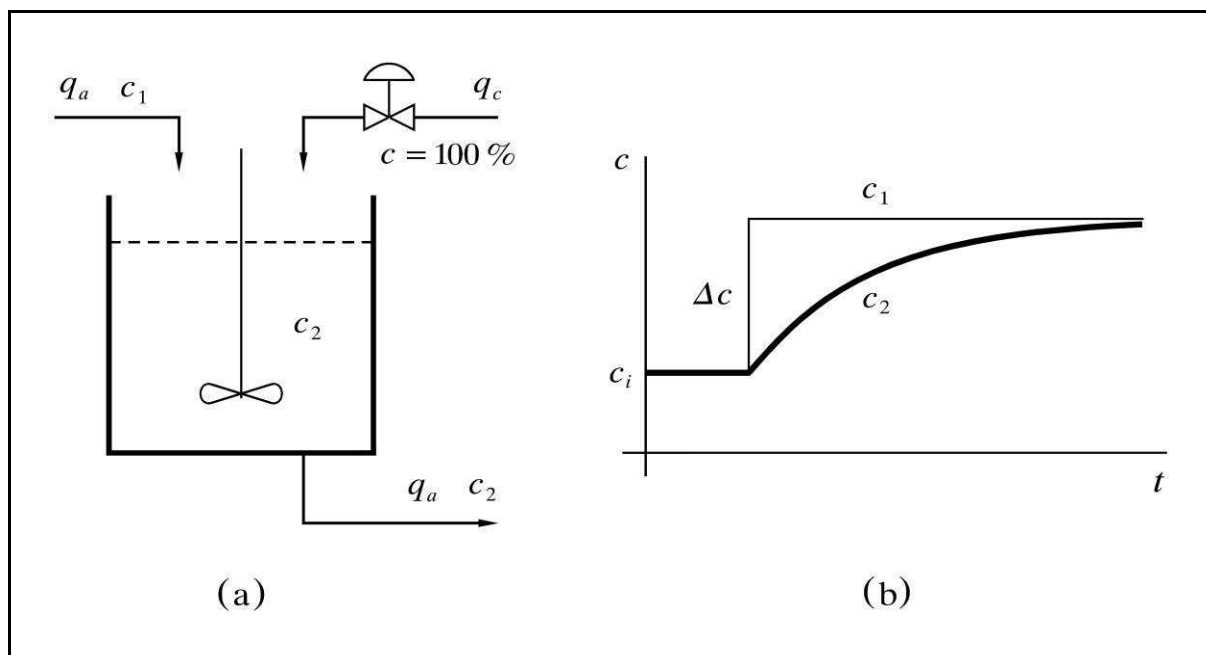


Fig. 7.17 Tanque con concentración controlada

En efecto, sabemos que este sistema corresponde a un retardo de primer orden, cuya función de transferencia es

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{1}{Ts + 1}$$

- La concentración de salida será la *suma* de la concentración debida a la de entrada más la debida al caudal de concentrado de aportación (principio de superposición). Es decir, que se tendrá la expresión

$$C_2 = Q_c \frac{k}{T_S + 1} + C_1 \frac{1}{T_S + 1}$$

- El caudal de aporte de concentrado vendrá dado por la expresión

$$Q_c = k_v X_c$$

- La ecuación que expresa la variable de salida  $C_2$  en función de las variables de entrada al diagrama de bloques,  $X_c$  y  $C_1$ , es

$$C_2 = X_c k_v \frac{k}{T_S + 1} + C_1 \frac{1}{T_S + 1}$$

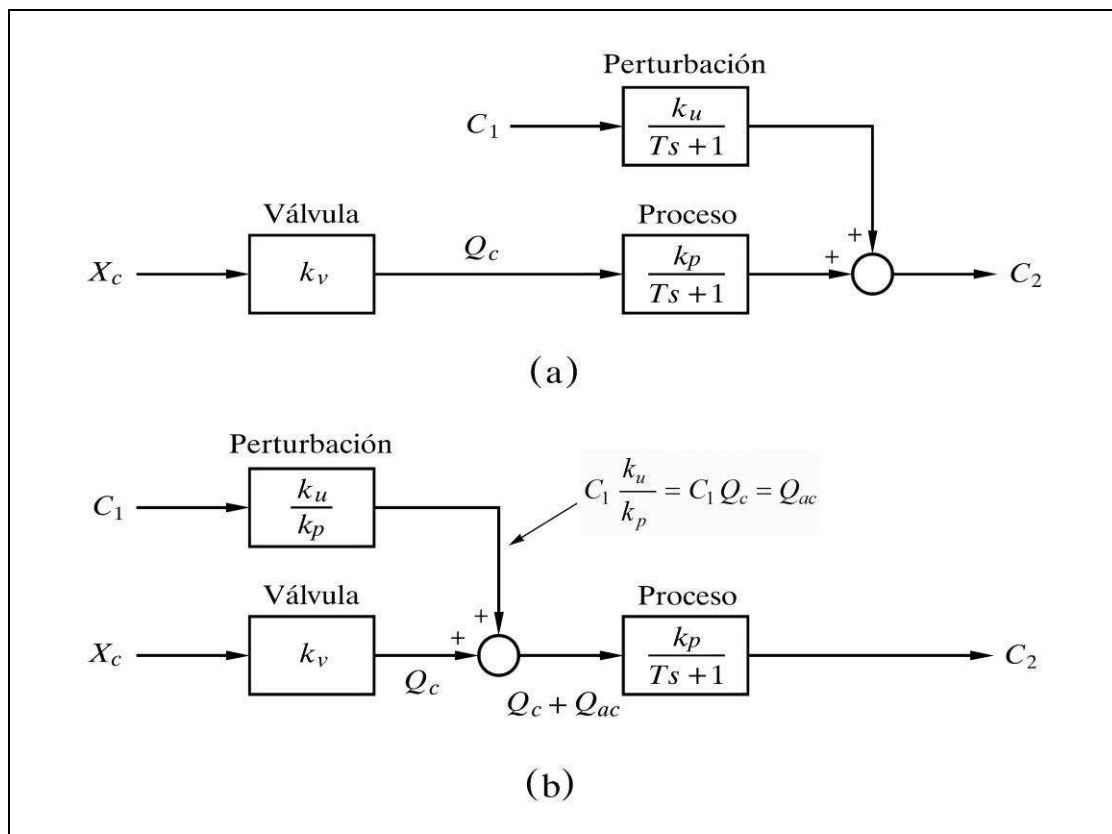


Fig. 7.18 Formas equivalentes de implantar un bloque perturbación en un diagrama de bloques

La figura 7.18(a) muestra el diagrama de bloques que contempla todas estas relaciones. Es de destacar que el bloque *proceso* y el bloque *perturbación* (cambio de

Nótese, una vez más, que estamos considerando solamente las variaciones de las variables en torno al punto de reposo. El verdadero valor de salida se hallaría sumando el valor calculado al valor que se tenía antes de aplicar el escalón (condiciones iniciales).

La figura 8.5 muestra diversas curvas de respuesta, en función de distintos valores de  $K$ , de un sistema con una constante de tiempo  $T$ . Las gráficas han sido tipificadas con relación al escalón de entrada  $A$  y a la constante de tiempo  $T$ . Recuérdese que, en todo momento, la información del verdadero valor de salida lo obtendríamos multiplicando el valor leído por  $A$  y el valor leído del tiempo por  $T$ .

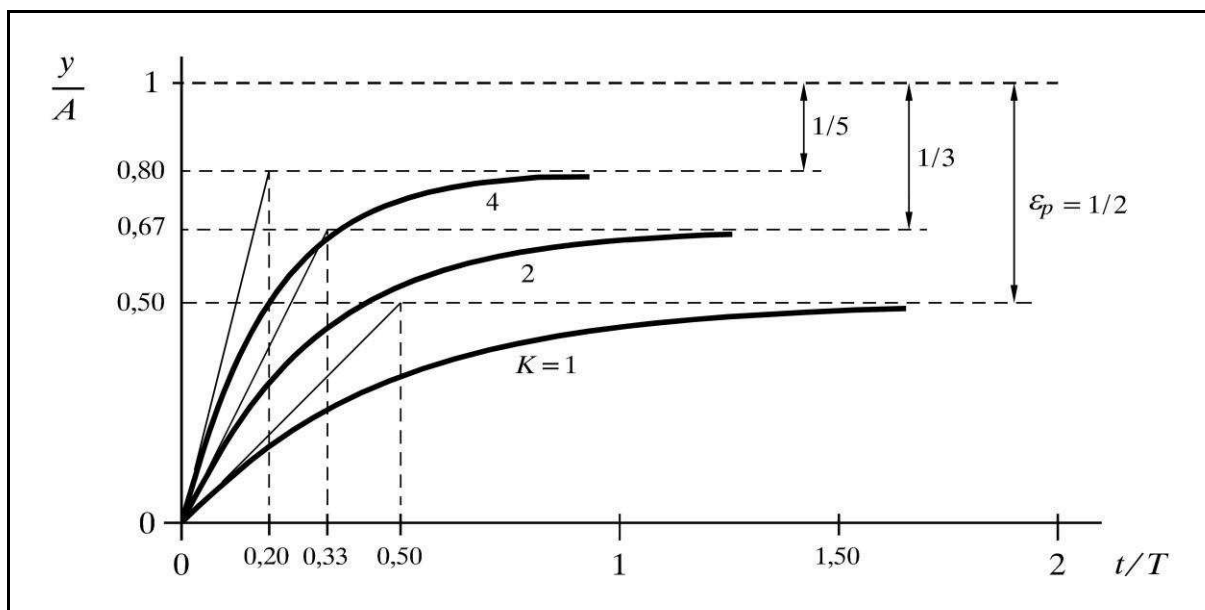


Fig. 8.5 Respuesta tipificada de un sistema formado por un retardo de primer orden y un controlador P, frente a un cambio en escalón del punto de consigna

Puede observarse que a medida que  $K$  se hace mayor, la desviación permanente y la constante de tiempo efectiva son cada vez menores. Así por ejemplo, para  $K=4$ , la desviación permanente  $\varepsilon_p$  (tipificada) vale  $1/(4+1) = 0,2$ ; es decir, que el valor final alcanzado es de  $1 - 0,2 = 0,8$ ; mientras que la constante de tiempo efectiva se ha hecho de  $T' = T/(4+1) = T/5$  (es decir,  $K+1=5$  veces menor), que al tipificarla queda en  $T'/T = 1/5 = 0,2$ .

La respuesta vemos que es siempre estable, independientemente del valor de los parámetros, lo que corroboraremos en el ejercicio práctico que sigue a continuación, por mediación de la respuesta frecuencial.

Puede sorprender la conclusión de que con una ganancia del controlador tan grande como se quiera, el sistema sea estable; pero debe tenerse en cuenta que un



La respuesta temporal la obtendremos directamente de las tablas de transformadas de Laplace, la cual, según cabía esperar, vemos que corresponde a la respuesta al escalón de un retardo de segundo orden.

La forma de la respuesta depende del factor de amortiguación  $\zeta$  y, en definitiva, de los valores de  $T_1$ ,  $T_2$  y  $K$ . Téngase en cuenta que las ecuaciones halladas en las tablas deben multiplicarse por el factor  $AK/(K+1)$ , por lo que puede ser conveniente tipificarlas.

Vemos que en todos los casos (con  $\zeta > 1$ ,  $\zeta = 1$  o  $\zeta < 1$ ) todavía se trata de un sistema estable, independientemente de los valores de los parámetros  $K$ ,  $T_1$  y  $T_2$ . Sin embargo, cuando  $\zeta < 1$  aparecen oscilaciones amortiguadas. Nótese que si no existiese regulación, el factor de amortiguación sería siempre  $\zeta \geq 1$ ; pero con regulación es posible hacer  $\zeta < 1$ . Podemos decir, en principio, que la regulación tiende a la inestabilidad, pero, en este caso, sin alcanzarla. Obsérvese que aun siendo diferentes las dos constantes de tiempo  $T_1$  y  $T_2$ , al intercambiar el orden en el que están situadas en el lazo, no cambia la respuesta. Nótese que si  $T_1 = T_2$  entonces

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{K+1}} < 1$$

por lo que la respuesta presentará, según se ha dicho, oscilaciones amortiguadas.

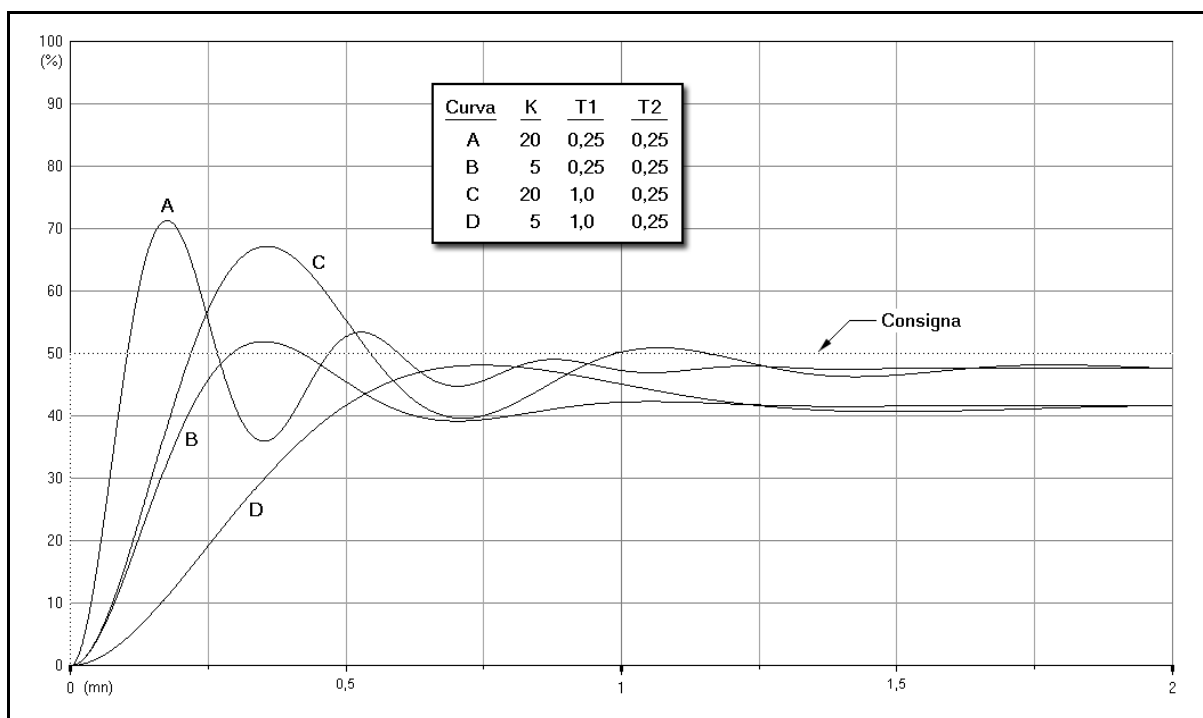


Fig. 8.7 Respuesta al cambio de consigna en escalón de un control proporcional de un proceso formado por dos retardos de tiempo de primer orden

que sea muy diferente de las otras. Entonces,  $R_A$  y  $R_B$  resultarán o muy grandes o muy pequeñas. En el primer caso se hará muy grande el primer factor (primer paréntesis) de la ecuación de  $K_{\max}$ ; en el segundo lo será el otro (segundo paréntesis). Nótese que en ambos supuestos, el factor “no favorecido” será, no obstante, algo mayor que la unidad.

Se deduce fácilmente que si las tres constantes de tiempo son iguales entre sí se tendrá la menor  $K_{\max}$  posible, esto es,

$$R_A = R_B = 1; \quad K_{\max} + 1 = (1+1+1)(1+1+1) = 9; \quad K_{\max} = 8$$

Así pues, la estabilidad del sistema depende de la ganancia estática global  $K$  y de la relación entre constantes de tiempo  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$ . Puede resumirse del siguiente modo, generalizable a *cualquier sistema*:

|                           |                     |   |
|---------------------------|---------------------|---|
| $K > K_{\max}; \zeta < 0$ | <i>Supercrítico</i> | Inestable (oscilaciones crecientes)                   |
| $K = K_{\max}; \zeta = 0$ | <i>Crítico</i>      | Límite de estabilidad (oscilaciones mantenidas)       |
| $K < K_{\max}; \zeta > 0$ | <i>Subcrítico</i>   | Estable. Tres variantes:                              |
|                           | $0 < \zeta < 1$     | <i>Subamortiguado</i> Oscilaciones amortiguadas       |
|                           | $\zeta = 1$         | <i>Críticamente amortiguado</i> Sin oscilaciones      |
|                           | $\zeta > 1$         | <i>Sobreamortiguado</i> Acercamiento asintótico lento |

Hay que recordar que la respuesta *críticamente amortiguada* es precisamente la respuesta asintótica *más rápida posible sin rebasamiento*; es decir, con el mínimo tiempo de establecimiento (véase apartado 7.3, pág. 313). En cuanto  $\zeta$  se hace ligeramente inferior a 1 ya se tiene rebasamiento, por ínfimo que sea. En la respuesta *sobreamortiguada* el acercamiento es más lento que en la *críticamente amortiguada*; podríamos decir que es un acercamiento “perezoso”.

Veamos un ejemplo mediante una práctica de simulación.

### Práctica n° 8.7

Prepararemos un proceso formado por tres elementos *retardo de primer orden* en serie, cada uno de ellos con una constante de tiempo de 0,25 minutos. Ya hemos visto que cuando las tres constantes de tiempo son iguales, entonces se tiene que la ganancia máxima es  $K_{\max} = 8$ . Calculemos la frecuencia crítica  $\omega_c$ , de acuerdo con las ecuaciones indicadas más atrás:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}} = \sqrt{\frac{0,25 + 0,25 + 0,25}{0,25 \times 0,25 \times 0,25}} = 6,928203 \text{ rad/mn.}$$

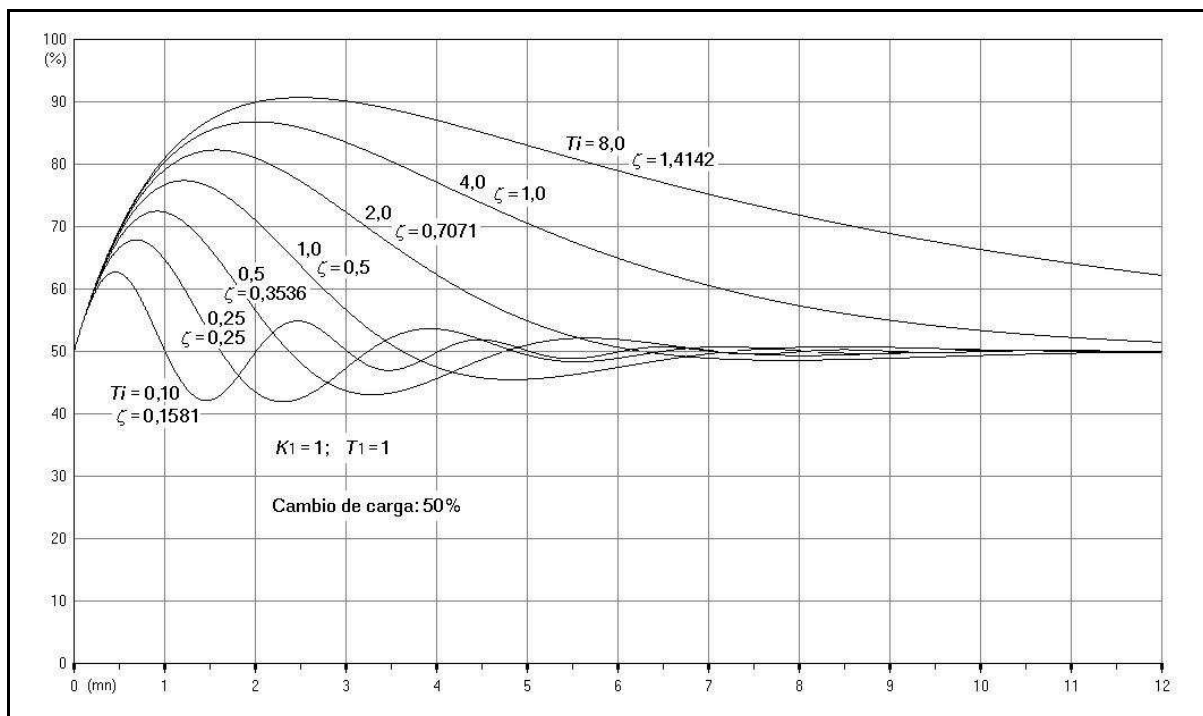


Fig. 8.11 Respuesta a los cambios de carga con control integral de un proceso formado por un retardo de primer orden

Una aplicación práctica de este tipo de regulación es aquella en la que se tiene un tanque “pulmón”, a efectos de “suavizar” las variaciones más o menos bruscas de un caudal. Éste es vertido dentro del tanque en el cual se implanta una regulación de nivel mediante un controlador integral. La válvula de control se encuentra en la línea de impulsión de la bomba que extrae el líquido del tanque. El controlador se ajustará para un factor de amortiguación  $\zeta = 1$  (amortiguación crítica) o superior (sobreamortiguado). Veámoslo con un ejemplo mediante el ejercicio de una práctica.

## Práctica nº 8.8

Prepararemos un sistema compuesto por un proceso formado por un elemento *retardo de primer orden* con una constante de tiempo de 1 minuto (un recipiente cuya variable de proceso se va a controlar) y por un *controlador integral* al que no se le efectuarán cambios en el punto de consigna. El proceso vendrá afectado por cambios de carga, consistentes en variaciones bruscas en escalón del caudal de aporte al recipiente. Se pretende “suavizar” dicho caudal de aporte.

La salida de la válvula es el caudal de extracción del recipiente (variable manipulada, que en este caso coincidirá con la salida del controlador). El caudal de aporte es la variable perturbadora (de tipo aditivo: un aumento de caudal provoca un aumento de la variable controlada). En condiciones de caudal de aporte constante, una vez estabilizado el proceso, ambos caudales, aporte y extracción, deberán coincidir.

- Entrar en la opción *Control de un lazo cerrado simple*.

- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
 

|   |
|---|
| $T_i = 4$ para amortiguac. crítica.<br>Entonces se tiene: $\zeta = 1$ |
|---|

  - C-1 → Integral;  $T_i = -4 / C = 50 / Ca = 50$   
( $T_i$  negativo hace una ganancia negativa)
  - P-1 → Retardo de primer orden;  $T = 1 / K = -1 / Be = 50 / Bs = 50$   
( $K$  negativo: un aumento de extracción disminuye la variable controlada)
  - U-1 → Retardo de primer orden;  $T = 1 / K = 1 / U = 80 / Ua = 50 / Esp = 0$   
*Duración* = 30
- Entrar en la opción *Rampas (C/R)* y asignar:
  - Bloque | Señal →  U-1 » Perturbación | Retardo 1er. orden
  - Tiempos (mn.) :  $t_1 = 1 / t_2 = 1 / t_3 = 15 / t_4 = 15$
- Seleccionar en *Cambios/Modos (C/M)*:
  - Medida y Salida Controlador

Hemos configurado un cambio de carga de tal manera que en el minuto 1 presentará un salto en escalón del 30% (del 50 al 80%) y en el minuto 15 volverá, también en escalón, al valor del 30%. No existe salto en el punto consigna. El controlador tiene asignado un tiempo integral  $T_i$  de 4 minutos (el signo negativo invierte la acción a negativa) que corresponde a una amortiguación crítica, puesto que, según se ha visto, para  $\zeta = 1$ , se tiene  $T_i = 4 K_1 T_1 = 4 \times 1 \times 1 = 4$ .

- Ejecutar, pulsando *T/R*, la opción *Rampas programadas* correspondiente a la *Respuesta temporal*.

En principio, es de poco interés la respuesta de la variable controlada mostrada en línea continua. Es más interesante observar la salida del controlador (línea de puntos), indicativa de la posición de la válvula y, por tanto, del caudal de extracción. Debe ser comparado con la línea de trazos (el escalón de subida en el minuto 1 y de bajada en el minuto 15), que pertenece al caudal de entrada, el cual se ha pretendido “suavizar” a la salida. En efecto, la extracción inicial del 50%, se va aproximando paulatinamente al 80% una vez se inicia el escalón de subida de la perturbación. Ello ha sido necesario para compensar el incremento de caudal de aporte al recipiente, que ha pasado del 50 al 80%. Después, la extracción vuelve a decaer lentamente, en cuanto el aporte retorna al valor inicial del 50% en el escalón de bajada.

- Asignar al controlador los valores de *Tiempo de integración*  $T_i$  de  $-8$  y  $-16$ , repitiendo, en cada caso, la respuesta temporal para *Rampas programadas*.

Los respectivos factores de amortiguación del sistema habrán sido:

$$\text{Para } T_i = 8: \quad \zeta = 1,41$$

$$\text{Para } T_i = 16: \quad \zeta = 2,0$$

- Seleccionar en *Cambios/Modos*:
  - ⊙ Medida
- Ejecutar la *Respuesta temporal*.

En estas condiciones tenemos que  $\zeta=1$  y, por tanto, se tiene amortiguación crítica, con el consecuente acercamiento asintótico al valor final.

- Superponer diversos gráficos de *Respuesta temporal*, dando a la ganancia del controlador los valores 0,5; 2; 4 y 8. Las respuestas son siempre con acercamiento asintótico. De hecho, excepto la primera (para  $G=1$ ), las demás son sobreamortiguadas. Si se aumentase la ganancia a valores muy grandes, por ejemplo a 50, sería preciso aumentar la *frecuencia de muestreo*.

Pruebe el lector de ejecutar las gráficas temporales con diversas combinaciones de los parámetros significativos, verificando los resultados mediante la *Respuesta frecuencial*.

### 8.3.7 Control proporcional-integral de un proceso formado por dos retardos de primer orden

La figura 8.13 muestra un diagrama de bloques de un lazo compuesto por dos *retardos de primer orden*, que va a ser regulado por un *controlador P+I*. Se han omitido los bloques válvula y medidor, a los que se les atribuye una ganancia unitaria, y se ha incluido un posible cambio de carga o perturbación en cada uno de los bloques que forman el *proceso*.

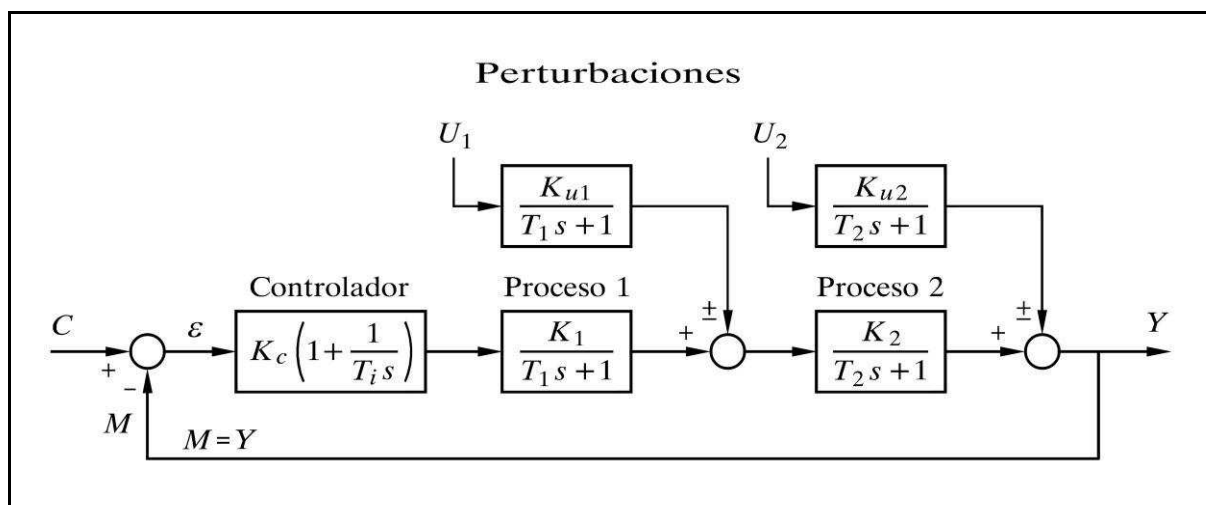


Fig. 8.13 Control P+I de un proceso compuesto por dos retardos de primer orden sometidos a perturbaciones

acción integral es demasiado enérgica (tiempo integral pequeño) las oscilaciones duran excesivamente, e incluso el sistema podría volverse inestable. En las curvas de la derecha la ganancia del controlador es  $K_c = 0,6 K_{cP,max}$ , en donde observamos que en todos los casos las oscilaciones persisten demasiado tiempo y que incluso son crecientes (sistema inestable) con un tiempo integral pequeño. Ello es debido a que se ha fijado una ganancia demasiado grande.

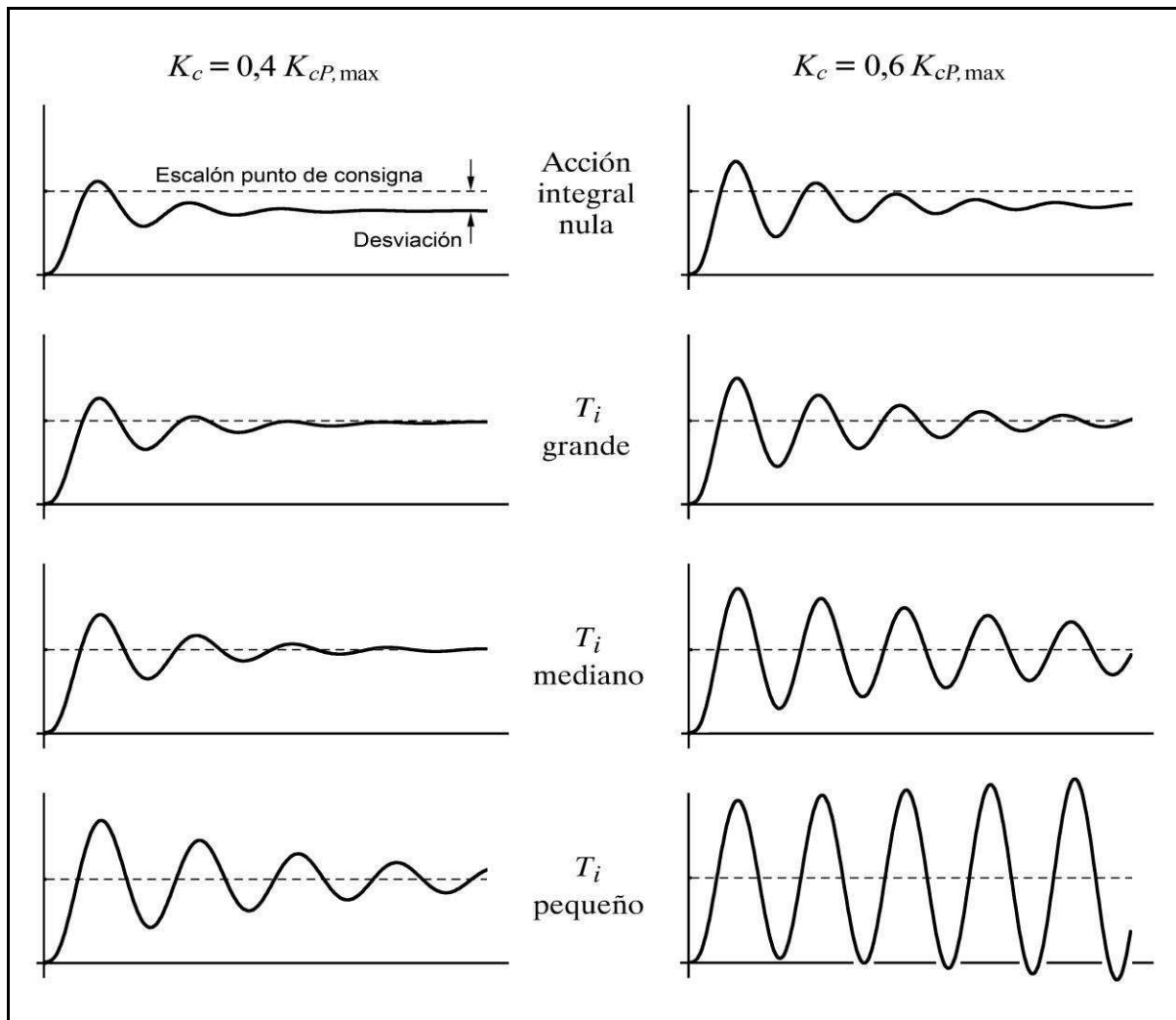


Fig. 8.14 Efecto de la acción integral en un sistema con tres constantes de tiempo.  
En la página 432 se muestran los datos de configuración de este sistema

De acuerdo con lo dicho en el apartado anterior (ver la práctica 8.10), en un sistema con tres o más retardos de tiempo, el ángulo de fase total tenderá a  $-270^\circ$  cuando la frecuencia tienda a infinito. Esto significa que, aun con una acción integral nula, es posible alcanzar la inestabilidad si la ganancia estática total del lazo excede de un determinado valor ( $K_{max}$ ), lo que ya se estudió en el apartado 8.3.4 (pág. 379). En cualquier caso, la acción integral introduce un efecto desestabilizador en el sistema, tanto mayor cuanto más enérgica sea ( $T_i$  pequeño); en contrapartida, anula la

reales, difícilmente podemos conocer el *verdadero* valor de la variable controlada, ya que nuestra única referencia de la misma es a través de la medición, y, sin embargo, en este gráfico podemos observar que la amplitud de las oscilaciones del proceso (variable controlada) es notablemente mayor que la mostrada por la medida. En particular, el primer sobreimpulso pudiera haber rebasado los límites tolerables, sin que ello haya sido denunciado por la medida. Según comprobaremos más adelante, este fenómeno se agrava cuanto mayor es la relación  $T_m/T_1$ . Esto nos conduce a una simple y clara conclusión:

*Los retardos de tiempo en el dispositivo de medida perjudican la regulación de un proceso, ya que enmascaran el verdadero valor de la variable controlada, la cual puede contener oscilaciones y desviaciones cuyas magnitudes sean notablemente mayores que las mostradas por su medición.*

También comprobaremos que para procesos más complejos, el retardo de tiempo en la medida tiende a desestabilizar el sistema (los márgenes de ganancia y de fase disminuyen).

### Práctica nº 8.13

Sea un sistema controlado compuesto por una válvula, un calentador de aire y un bulbo de temperatura, los cuales tienen unas constantes de tiempo de 0,1; 0,3 y 1 minuto, respectivamente. La regulación es llevada a cabo por un controlador P+I. El sistema sufre fuertes cambios de carga en el proceso. Alguien “demuestra” que el sistema mejora su respuesta si se introduce el bulbo en una vaina (funda), a efectos de aumentar la constante de tiempo  $T_M$  del medidor. Se asume que la constante de tiempo ha sido doblada, pasando a ser de 2 minutos. La “demostración” se basa en los registros gráficos que se dispone de la respuesta, frente a perturbaciones similares, *con* y *sin* la vaina en cuestión.

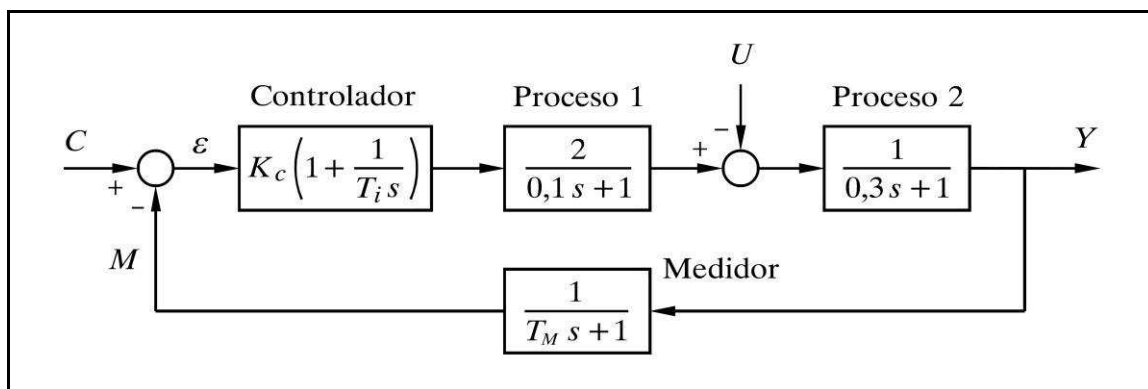


Fig. 8.22 Sistema controlado de la práctica 8.13

En efecto, se observa que las variaciones de temperatura han sido reducidas aproximadamente en un tercio. Sabemos, sin embargo, que el aumento en el retardo

de tiempo del medidor no puede mejorar la regulación. Hay que demostrar, seriamente, que las conclusiones que se han obtenido son erróneas, a pesar de las apariencias.

La figura 8.22 muestra la configuración correspondiente a este problema. Nótese la perturbación del tipo sustractivo. Los parámetros  $K_c$  y  $T_i$  del controlador son determinados en cada caso para optimizar la respuesta frente a una perturbación y se conviene que son los siguientes:

Para  $T_M=1$ :  $K_c=2,2$ ;  $T_i=0,75$

Para  $T_M=2$ :  $K_c=3,3$ ;  $T_i=0,85$

### Instrucciones

- Entrar en la opción *Control de un lazo cerrado simple*.
- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
  - C-1 → P+I+D;  $G = 2,2 / T_i = 0,75 / T_d = 0 / C = 50 / C_a = 50$
  - P-1 → Retardo de primer orden;  $T = 0,1 / K = 2$
  - P-2 → Retardo de primer orden;  $T = 0,3 / K = 1$
  - U-1 → Ganancia;  $K = -1 / U = 60 / U_a = 0 / Esp = 0$
  - M-1 → Retardo de primer orden;  $T = 1 / K = 1 / Z = 0$
  - Duración = 6*
- Importante: Seleccionar en *Cambios/Modos*:
  - ⊙ Medida ← Esto es importante
- Ejecutar la *Respuesta temporal*.

El gráfico nos presenta la respuesta debida al cambio de carga, para el caso en que el bulbo se halla desprovisto de su vaina ( $T_M=1$ ).

- Modificar:
  - C-1 :  $G = 3,3 / T_i = 0,85$
  - M-1 :  $T = 2$  (caso con vaina,  $T_M=2$ )
- Ejecutar la *Respuesta temporal*, superponiéndola a la anterior.

Esta es la respuesta para el caso en que se halla incluida la discutida vaina. Dado que ambas respuestas están optimizadas, parece confirmarse que la regulación ha mejorado, puesto que las oscilaciones causadas por la misma perturbación son ahora de menor amplitud. Sin embargo, esto es solamente cierto en cuanto a la variable *medida*, que es la mostrada por los registros. Lo que debemos analizar es qué ha sucedido con la verdadera *variable controlada*; es decir, con la *temperatura real* del proceso, la cual nunca será mostrada (observada) en un sistema real.



- Seleccionar en *Cambios/Modos*:
  - ⊙ Medida y Variable controlada  $\Leftarrow$  Esto es importante
- Ejecutar nuevamente la *Respuesta temporal*.
- Entrar los parámetros correspondientes a la instalación sin vaina, haciendo la modificación:
  - C-1 :  $G = 2,2 / T_i = 0,75$
  - M-1 :  $T = 1$
- Ejecutar la *Respuesta temporal*, superponiéndola a la anterior.

Los gráficos de color verde corresponden a la respuesta sin vaina, y los de color rojo a la respuesta con vaina. Para cada caso, las líneas de trazo continuo muestran la *medida* y las de puntos la *variable controlada* (proceso).

Puede comprobarse fácilmente que las oscilaciones de la temperatura del proceso son algo mayores en el caso con vaina y, por otra parte, tardan más tiempo en estabilizarse. La frecuencia de sus oscilaciones es menor (el periodo es más largo), lo cual puede confirmarse ejecutando el *Diagrama de Bode* o *Real*, en *lazo abierto*, superponiendo las curvas de ambos casos y observando las respectivas frecuencias de resonancia (donde la curva angular corta a la línea de  $-180^\circ$ ). También puede verificarse sobre el *Diagrama de Nyquist*, mediante la búsqueda de la *frecuencia crítica*, en la opción 'Crítica'.

## 8.5 Efecto de un tiempo muerto en un sistema

Recordemos que los tiempos muertos se producen en los procesos reales debido a un fenómeno de transporte de materia. En muchos casos es una propiedad o cualidad de esta materia la que se desea controlar, y que, por tanto, se precisa medir (temperatura, densidad, pH, etc.). Un caso muy típico es el de la medida de la temperatura basada en un bulbo o sensor, situado en una conducción, a cierta distancia (por razones constructivas) de donde realmente interesaría medir. El tiempo que tarda el fluido en recorrer la distancia que separa ambos puntos es un tiempo muerto. Cualquier variación de temperatura que se produzca en el proceso, no empezará a ser percibida por el medidor y, por tanto, por el controlador, hasta un tiempo más tarde.

Otros ejemplos son la cinta transportadora, o el analizador continuo que tiene que recibir la muestra a analizar a lo largo de una pequeña conducción de mayor o menor longitud (véase el apartado 4.2.9, “Elemento tiempo muerto”, pág. 127).

### 8.5.1 Efecto del tiempo muerto en la medida

En principio, resulta evidente que el controlador recibe constantemente una información “obsoleta”, lo que equivale a decir que las “decisiones” que toma en cada momento, las toma con retraso. Desde el instante en que se produce un determinado cambio o reacción del proceso, hasta el momento en que el controlador reci-

be la correspondiente información, el sistema ha seguido evolucionando. Recuérdese la diferencia fundamental con los retardos de tiempo, en los que los cambios se manifiestan desde el primer momento en que se producen. De aquí que a veces se utilice la expresión *tiempo muerto puro*.

Según podremos comprobar a continuación, los tiempos muertos tienden a desestabilizar cualquier sistema, o en todo caso hacen más difícil su controlabilidad. La razón es muy clara: según se estudió en el apartado 6.4.5 (pág. 280), el ángulo de fase de un tiempo muerto es  $\theta = -\omega T$ , lo que implica un retardo que crece ilimitadamente con la frecuencia; en otras palabras, para  $\omega \rightarrow \infty$ , entonces  $\theta \rightarrow -\infty$ . Esto significa que cualquier sistema al que se le añada un tiempo muerto verá incrementado su ángulo de retardo en una magnitud tanto mayor cuanto mayor sea la frecuencia, de tal manera que los márgenes de ganancia y fase se verán siempre disminuidos. Si la ganancia del lazo es lo suficientemente elevada, el sistema podrá hacerse inestable. Cualquier proceso que contenga un tiempo muerto tiene una frecuencia crítica y una ganancia máxima finitas. Téngase presente que esto es igualmente válido incluso para aquellos sistemas que sin la presencia de tiempo muerto son estables para cualquier valor de ganancia; lo cual sucede cuando el ángulo de fase tiende asintóticamente a  $-180^\circ$  a altas frecuencias. En estas condiciones el margen de ganancia es infinito e igualmente lo es la ganancia máxima, pero al incorporar el tiempo muerto ambos parámetros pasan a tener un valor finito.

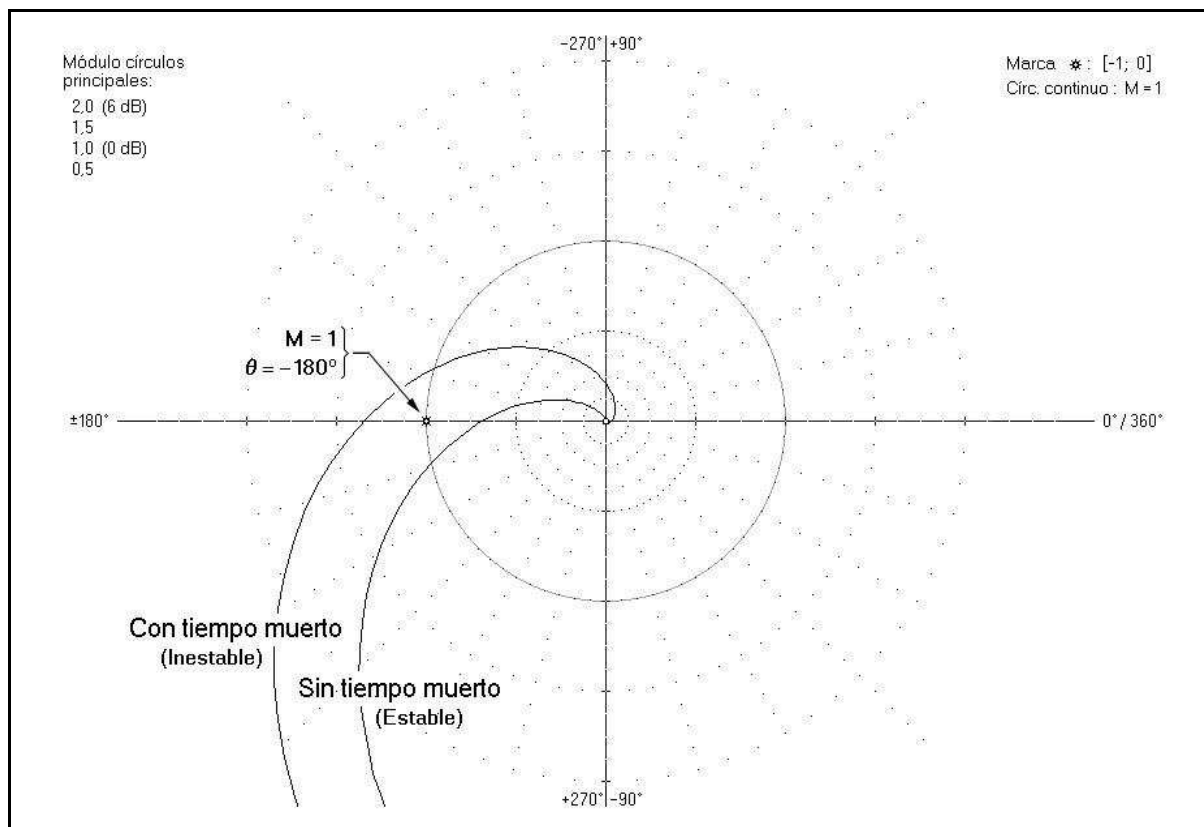


Fig. 8.23 Influencia del tiempo muerto en la respuesta frecuencial mostrada por un diagrama de Nyquist

La figura 8.23 muestra el diagrama de Nyquist de un sistema, tal como el que se acaba de describir, y del mismo sistema con un tiempo muerto adicional.

Se observa claramente que en el segundo caso el sistema a pasado a ser inestable. El efecto del tiempo muerto en un diagrama de Nyquist es modificar la gráfica y convertirla en una espiral en la zona de altas frecuencias, de tal manera que no existe acercamiento asintótico a ninguno de los ejes cuando la frecuencia tiende a infinito. Este fenómeno puede apreciarse mejor en el diagrama de Bode de la figura 8.24, en el que se muestran las mismas respuestas. Puede observarse que para bajas frecuencias la influencia del tiempo muerto es despreciable (su colaboración en el retardo total es escasa); pero a medida que crece la frecuencia, mientras que el sistema sin tiempo muerto tiende asintóticamente a  $-270^\circ$  (por tres constantes de tiempo), el sistema con tiempo muerto muestra un retardo creciente de manera ilimitada. Nótese que la curva de ganancia no se ve afectada por la presencia de un tiempo muerto, lo cual resulta obvio si se piensa que éste no modifica la amplitud de una señal.

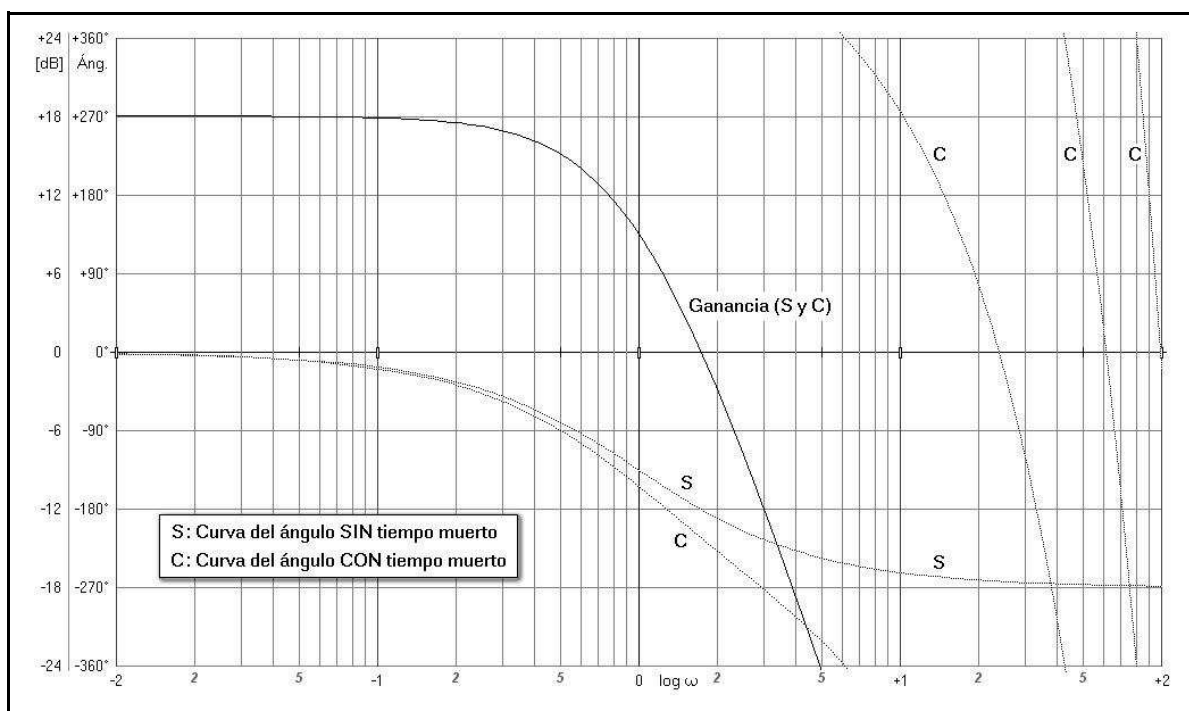


Fig. 8.24 Influencia del tiempo muerto en la respuesta frecuencial, mostrada por un diagrama de Bode

### Práctica nº 8.14

- Entrar en la opción *Control de un lazo cerrado simple*.
- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
  - C-1 → P+D;  $G = 8 / Td = 0 / C = 50 / Ca = 20$
  - P-1 → Retardo de primer orden;  $T = 0,5 / K = 1$

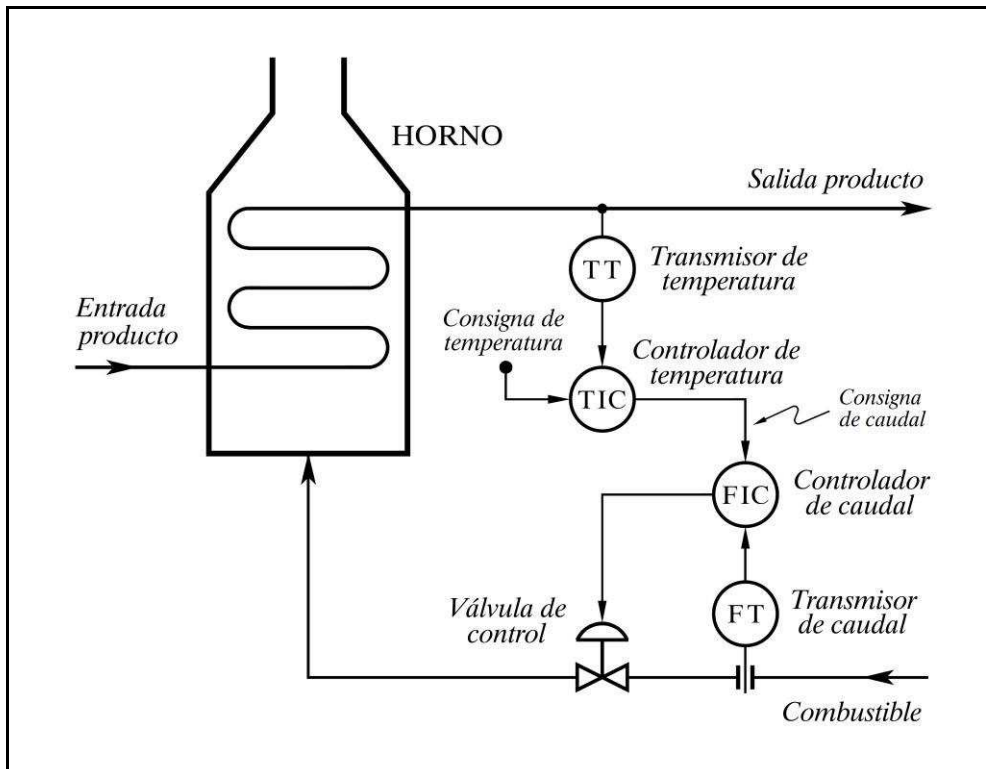


Fig. 9.5 Control en cascada de la temperatura en un horno

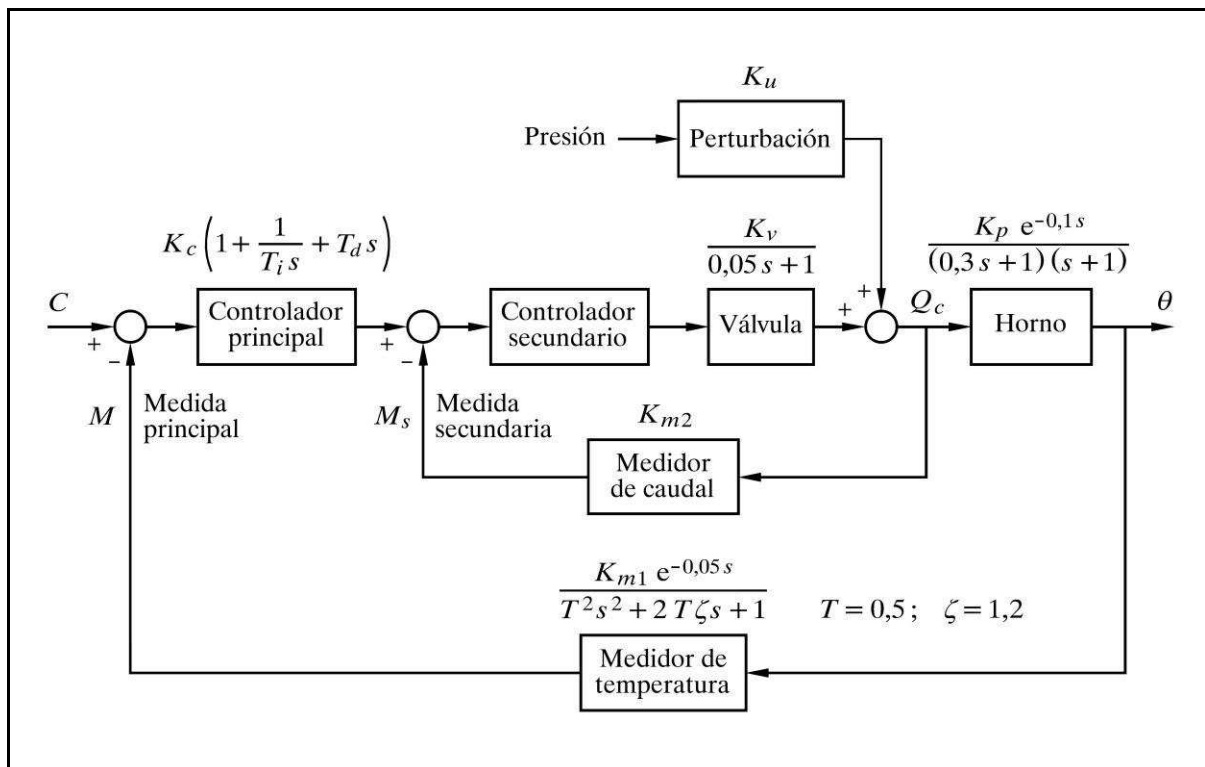


Fig. 9.6 Diagrama de bloques de un control en cascada correspondiente a la figura 9.5

En la figura 9.7 se ha introducido un bloque de perturbación al proceso, como podría ser la temperatura del producto a la entrada del horno o la variación del caudal de dicho fluido. Veamos cuál sería la ganancia  $K_{up}$  en cada uno de estos dos casos.

1. *Temperatura  $\theta_e$  del producto a la entrada:*

La ganancia estática  $K_{up}$  sería la variación de temperatura a la salida del horno, por cada grado de variación de temperatura a la entrada. Puesto que una ligera variación en la temperatura de entrada repercutiría aproximadamente en la misma cuantía en la temperatura de salida, se tendría, como valor práctico:

$$K_{up} = \frac{\Delta\theta}{\Delta\theta_e} = 1$$

y sería una perturbación de tipo aditivo.

2. *Caudal de producto  $q_f$ :*

La ganancia estática  $K_{up}$  sería la variación de temperatura a la salida del horno, por unidad de variación de caudal de producto. De una manera aproximada, el incremento total de temperatura del producto en el horno sería, asumiendo el resto de condiciones constantes, proporcional al caudal de combustible  $q_c$  e inversamente proporcional al caudal de producto  $q_f$ . Es decir, que considerando la temperatura “normal” de entrada como *valor de referencia* 0, y llamando  $\theta$  al *incremento total* de temperatura que se produce en el horno, se tendría

$$\theta = k \frac{q_c}{q_f}$$

y, por tanto,

$$K_{up} = \frac{d\theta}{dq_f} = -k q_c \frac{1}{q_f^2} = -\frac{\theta}{q_f}$$

en donde vemos que en este caso resulta una función no lineal, pues la ganancia depende del punto de operación. El signo negativo nos indica, como era de esperar, que se trata de una perturbación sustractiva (un aumento de caudal provoca una disminución de temperatura). Prácticamente linealizaríamos la función asumiendo las condiciones normales de operación y haciendo

$$K_{up} = -\frac{\theta_n}{q_{fn}}$$

en donde  $\theta_n$  y  $q_{fn}$  son, respectivamente, la temperatura de salida y el caudal de producto, ambos referidos a condiciones normales de operación.

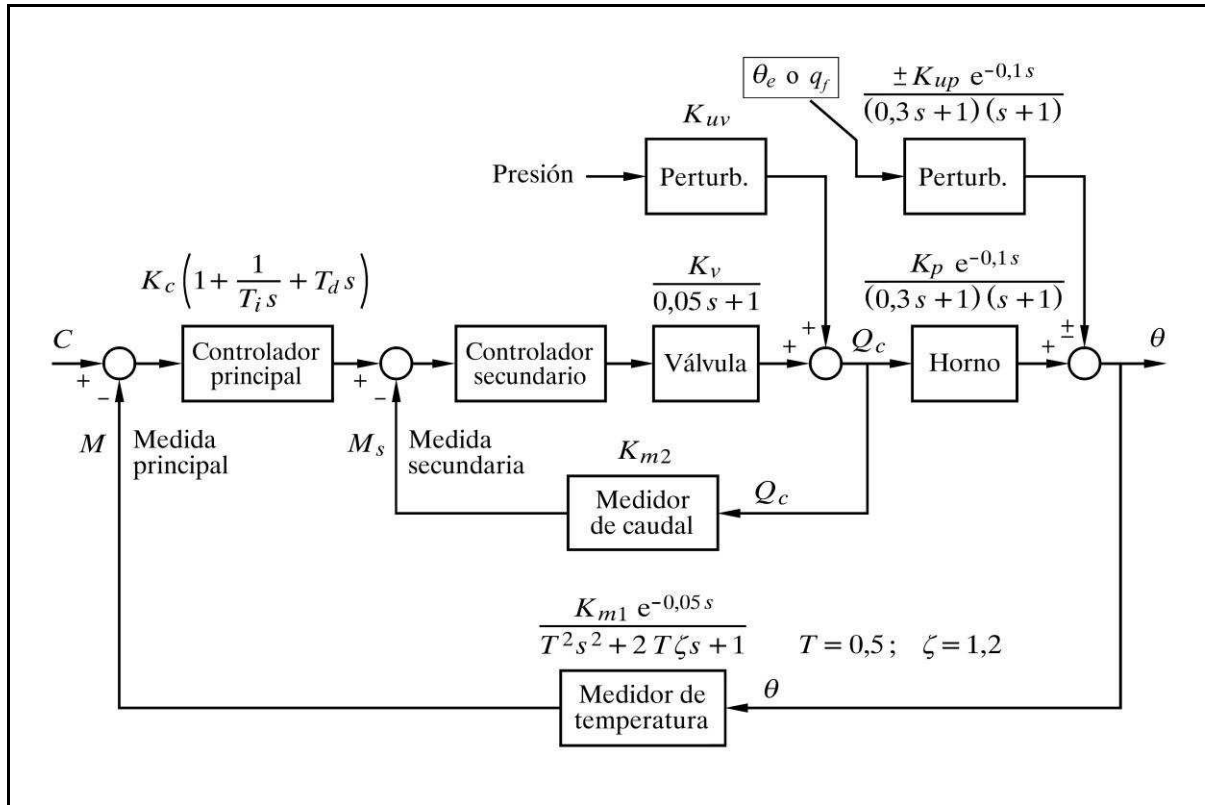


Fig. 9.7 Diagrama de bloques del control del horno con una perturbación en el proceso

Vemos que esta perturbación se introduce fuera del lazo secundario, entrando directamente en el proceso o lazo principal y, por tanto, no podrá evitarse que afecte a la variable regulada. No obstante, se demuestra que una configuración en cascada mejora la controlabilidad del lazo, de tal manera que las desviaciones causadas por una perturbación de este tipo son menores que si se tratara de un lazo sencillo.

La optimización de una regulación en cascada se consigue optimizando en primer lugar el lazo secundario y después el lazo principal. El lazo secundario, por contener escasos elementos, con constantes de tiempo pequeñas, suele admitir ganancias muy grandes del controlador, antes de volverse crítico, por lo que normalmente suele ensayarse una ganancia elevada. Por esta razón, en general es suficiente un controlador P, ya que la desviación permanente será pequeña y, en todo caso, ésta carece de importancia (no se está interesado en la variable manipulada, y la pequeña desviación permanente resultante será compensada por el controlador principal). En la práctica, debido a la presencia de diversos retardos de tiempo de pequeño valor, siempre habrá una ganancia máxima que haría el sistema secundario crítico. Un valor razonable de fijación de la ganancia será la mitad de la máxima. La optimiza-

ción del lazo principal, una vez efectuada la del secundario, se lleva a cabo como en un lazo simple, pero teniendo activada la conexión en cascada del controlador secundario. El lazo secundario, pasa a ser, como conjunto, un bloque más del lazo principal. Citemos que incluso siendo el lazo secundario inestable, el sistema global puede ser estable (ver práctica n° 9.3), pero es una situación que hay que evitar, debido a que el controlador principal puede ser conmutado a control *manual* y entonces se tendrían oscilaciones crecientes en el lazo secundario. Si a pesar de todo lo dicho hay que fijar una baja ganancia en el controlador secundario, puede ser conveniente asignarle acción integral. La acción derivativa en este controlador ya hemos dicho que en principio no es recomendable, especialmente si se trata de un lazo rápido y portador de ruido (por ejemplo un lazo de caudal); pero para sistemas lentos, con tres o cuatro constantes de tiempo y sin tiempo muerto importante, la acción derivativa puede incrementar notablemente la frecuencia crítica, mejorando el comportamiento del lazo.

### Práctica n° 9.1

Analizaremos la respuesta de una regulación en cascada frente a perturbaciones en el lazo secundario, según la figura 9.6, y la compararemos con la que se tendría en un lazo simple, bajo las mismas condiciones. Para ello, procederemos a efectuar los siguientes pasos:

- De acuerdo con los parámetros que nos proporciona la figura 9.6, configuraremos un sistema controlado basado en un lazo simple y, por tanto, sin el controlador secundario ni su medidor.
- Optimizaremos el sistema para cambios en el punto de consigna.
- Para una determinada perturbación en la válvula, analizaremos el efecto que causa en el proceso (variable controlada) y en la medida.
- Configuraremos un sistema basado en un control en cascada, con los mismos componentes y parámetros del lazo simple, y lo optimizaremos.
- Analizaremos el efecto que causa, sobre el proceso y la medida, la misma perturbación que se aplicaba al lazo simple.
- Compararemos ambos resultados, para diversos ajustes del controlador secundario.

La simulación del horno la efectuaremos asignando a P-1 el elemento tiempo muerto de 0,1 minutos ( $\equiv 6$  s), y asignando a P-2 un bloque retardo de segundo orden, equivalente a los dos retardos de primer orden,  $1/(0,3s + 1)$  y  $1/(s + 1)$ . Es evidente que podríamos asignar a P-2 y P-3 los bloques retardo de primer orden citados, pero efectuando la equivalencia practicaremos un principio que puede ser

de interés en otras simulaciones que haga el lector y, concretamente, nos será útil más tarde en esta misma práctica. Recordemos que según vimos en el apartado 4.2.8.e, “Elementos de segundo orden”, subapartado “Dos retardos de primer orden en serie” (pág. 115), podemos hacer:

$$T = \text{constante de tiempo} = \sqrt{T_1 T_2} = \sqrt{0,3 \times 1} = 0,547723$$

$$\zeta = \text{factor de amortiguación} = \frac{T_1 + T_2}{2 \sqrt{T_1 T_2}} = \frac{0,3 + 1}{2 \sqrt{0,3 \times 1}} = 1,18673$$

por lo que el retardo de segundo orden equivalente tendría la transmitancia

$$\frac{K_p}{0,3 s^2 + 2 \times 0,5477 \times 1,1867 s + 1} = \frac{K_p}{0,3 s^2 + 1,3 s + 1}$$

El coeficiente de  $s$  podíamos haberlo calculado directamente en virtud de la equivalencia vista en capítulos anteriores,  $2 \zeta T = T_1 + T_2 = 1,3$ .

## Instrucciones

- Entrar en la opción *Control de un lazo cerrado simple*.
- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
  - C-1 → P+D;  $G = 4,01757 / Td = 0 / C = 50 / Ca = 40$
  - V-1 → Retardo de primer orden;  $T = 0,05 / K = 1$
  - P-1 → Tiempo muerto;  $Tm = 6$  (0,1 mn.  $\equiv$  6 s)
  - P-2 → Retardo de segundo orden;  $T = 0,547723 / S = 1,18673 / K = 1$
  - U-v → Retardo primer orden;  $T = 0,05 / K = 1 / U = 30 / Ua = 0 / Esp = 60$
  - M-1 → Tiempo muerto;  $Tm = 3$  (0,05 mn.  $\equiv$  3 s)
  - M-2 → Retardo de segundo orden;  $T = 0,5 / S = 1,2 / K = 1 / Z = 0$
- Por el momento anularemos la perturbación seleccionando:
  - U-v → Ganancia;  $G = 1 / U = 0 / Ua = 0 / Espera = 0$
  - (La activaremos más tarde, cuando nos convenga, sin más que seleccionar el elemento retardo de primer orden, ya definido).
- Continuar con:
  - $Duración = 20$
- Seleccionar las escalas:
  - Escala de ganancias* :  $0 \div 2; -6 \div +6$
  - Escala de ángulos* :  $-180 \div +180$
  - Frecuencia inicial* :  $0,01; -2$
  - Frecuencia final* :  $10; +1$



Como ejemplo de aplicación de lo dicho, probar de asignar acción derivativa en el controlador secundario. Puede comprobarse que con cambios en escalón del punto de consigna la salida del controlador secundario se saturaría (se tendría un pico infinito) y sería imposible la asignación de este tipo de acción, independientemente de la frecuencia de muestreo que se aplique. Sin embargo, serán admisibles pequeños saltos en escalón de la perturbación, debido a que son “suavizados” por el retardo de la medida. En este caso la frecuencia de muestreo puede jugar un papel importante en la consecución del gráfico (dependerá, como es lógico, de la amplitud del salto, de la ganancia del controlador, del tiempo derivativo y de la constante de tiempo del medidor, entre otros). Ello aparte, en ningún caso es aconsejable la inclusión de acción derivativa en el controlador secundario, cuando se trata de un lazo rápido de respuesta.

Y por último, se recomienda experimentar la respuesta del sistema efectuando diversas modificaciones en la asignación de componentes y sus parámetros. En especial, resultará de interés asignar acción integral en cada uno de los controladores.

Experimentétese también comprobando qué sucederá si la perturbación entra más allá del lazo secundario; es decir, en el proceso principal (ver figura 9.7, pág. 440). Hágase la comparación con la respuesta en el caso de que la misma perturbación se aplicase a un lazo de control simple.

Sugerencia: en nuestro ejemplo podría ser un cambio en la temperatura del fluido a la entrada del horno. Entonces, según se ha dicho, se tendría que en la figura 9.7 (pág. 440),  $K_{up} = 1$ .

El lector deberá concluir que la respuesta mejora visiblemente en el caso de control en cascada.

## Práctica n° 9.2

En la implantación de un sistema de control en cascada, el lazo secundario no necesariamente tiene que ser un lazo rápido. En determinados casos puede ser un lazo con retardos de tiempo importantes, incluso con valores próximos a los del lazo principal. En estos supuestos todavía se saca partido de la configuración del control en cascada.

La figura 9.8 muestra un sistema de control de temperatura de un reactor químico encamisado y su diagrama de bloques. El controlador principal actúa según la diferencia entre en punto de consigna y la temperatura medida del producto en la vasija, siendo su salida la señal de punto de consigna del controlador secundario. Este último ajusta el caudal del fluido térmico a efectos de mantener la temperatura de la camisa en el valor determinado por el controlador principal. Los retardos de tiempo

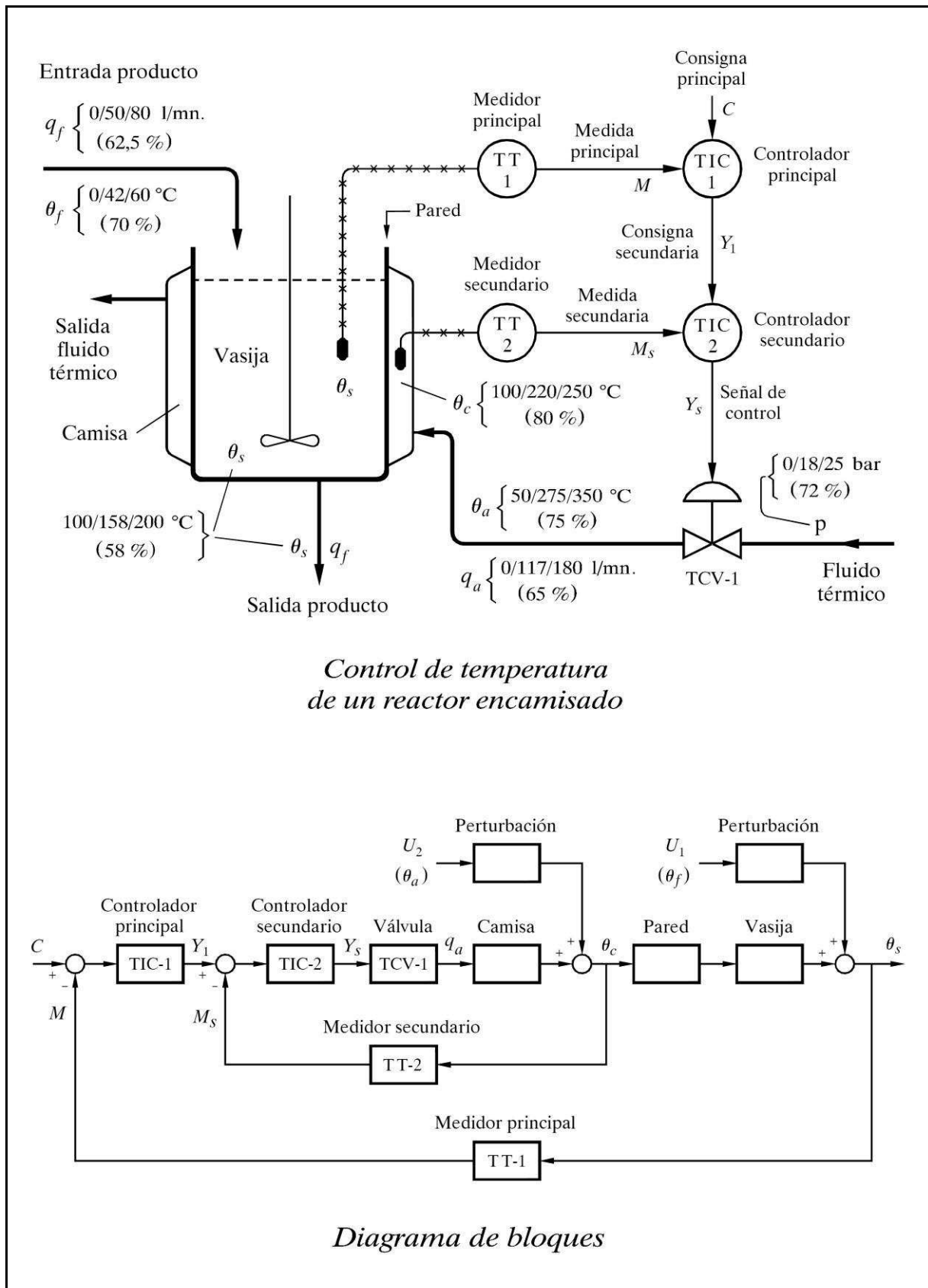


Fig. 9.8 Control de temperatura en cascada de un reactor encamisado

- *Salida controlador secundario y posición de válvula:*

1.h) Señal y posic. de válvula,  $y_2$  : 65 %

## 2. Efectos de los cambios de carga y perturbaciones

- *Efecto sobre  $q_a$  de los cambios de señal y de presión:*

2.a) Por señal,  $y_2$  : 1,8 l/mn. por cada 1 % de variación de  $y_2$

2.b) Por presión,  $p$  : 3,25 l/mn. por cada bar de variación de  $p$

- *Efecto sobre  $\theta_c$  de los cambios en el fluido térmico:*

2.c) Por caudal,  $q_a$  : 2,5 °C por cada l/mn. de incremento de  $q_a$

2.d) Por temp.,  $\theta_a$  : 0,75 °C por cada °C de incremento de  $\theta_a$

- *Efecto sobre  $\theta_s$  de los cambios en el proceso y de las perturbaciones:*

2.e) Por temperatura de la camisa,  $\theta_c$  : 0,84 °C por cada °C de  $\theta_c$

2.f) Por temperatura de entrada,  $\theta_f$  : 0,97 °C por cada °C de  $\theta_f$

2.g) Por caudal de producto,  $q_f$  : -1,95 °C por cada l/mn. de  $q_f$

## 3. Escalas o márgenes de operación en el sistema real

3.a) Presión fluido térmico,  $p$  : 0 ... 25 bar

3.b) Temp. fluido térmico,  $\theta_a$  : 50 ... 350 °C

3.c) Caudal fluido térmico,  $q_a$  : 0 ... 180 l/mn.

3.d) Temperatura camisa,  $\theta_c$  : 100 ... 250 °C

3.e) Temperatura vasija,  $\theta_s$  : 100 ... 200 °C

3.f) Temperatura entrada,  $\theta_f$  : 0 ... 60 °C

3.g) Caudal de producto,  $q_f$  : 0 ... 80 l/mn.

3.h) Señales de instrumentación : 0 ... 100 %

## 4. Escalas y márgenes en el sistema simulado

4.a) Escalas de procesos : 0 .. 100 %

4.b) Señales de instrumentación : 0 .. 100 %

Lo primero que se hará ahora es deducir las ecuaciones de funcionamiento del sistema real.

- *Ganancia modificada*  $k'_{u(\theta_f)}$

$$k'_{u(\theta_f)} = \frac{k_{u(\theta_f)}}{k_r} = \frac{0,582}{1,26} = 0,461905$$

y, como es sabido, la perturbación trasladada actuará como ganancia pura (sin función dinámica).

- Asumiremos los siguientes *tipos de elementos* y sus *parámetros dinámicos*:

- *Camisa* : Retardo de primer orden  
Constante de tiempo :  $T_c = 0,3$  mn.
- *Bulbo camisa* : Retardo de primer orden  
Constante de tiempo :  $T_{bc} = 0,15$  mn.
- *Pared* : Retardo de primer orden  
Constante de tiempo :  $T_p = 0,25$  mn.
- *Vasija* : Retardo de primer orden  
Constante de tiempo :  $T_v = 2$  mn.
- *Bulbo vasija* : Retardo de segundo orden  
Constante de tiempo :  $T_{bv} = 0,25$  mn.  
Factor de amortig. :  $\zeta_{bv} = 1,15$

Con toda esta información ya podemos definir los valores de los *parámetros* que hay que fijar en los *bloques del sistema simulado*, para las *condiciones normales de operación*; es decir, cuando no existe ningún tipo de perturbación y, por tanto, todas las variables se hallan en su valor normal (véase más atrás el desglose de las ecuaciones de funcionamiento).

- *Válvula*:

Tipo: Lineal

Ganancia :  $K = 1$

- *Perturbación de presión*:

Tipo: Ganancia

Ganancia :  $K = 0,451389$

Entrada (carga) :  $U = 72$

Entrada anterior :  $U_a = 72$

$$K_{Mo} = K_M \frac{x_{\max} - x_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \frac{v_{\max} - v_{\min}}{u_{\max} - u_{\min}} = 1$$

En la página siguiente, la figura 9.9 muestra el diagrama de bloques completo (tal como aparecerá en la pantalla del ordenador), con indicación de los márgenes de las variables y de sus valores normales de operación. Asimismo, se indican los parámetros que se han estado calculando (véase también la figura 9.8, pág. 448).

Los controladores se irán definiendo a medida que progrese el ejercicio práctico, para verificar las ventajas e inconvenientes de cada una de las acciones. Asimismo, se efectuarán diversos análisis del efecto de la incorporación de tiempos muertos en distintos puntos del lazo. Se verá también la eficacia del control en cascada, incluso cuando los retardos de tiempo de lazo secundario son similares a los del lazo principal. Igualmente, se efectuará un estudio sobre alinealidades, comprobando el efecto producido por cambiar la válvula de tipo lineal por una isoporcentual.

## Instrucciones

Analizaremos en primer lugar el comportamiento del lazo secundario como un sistema independiente.

- Entrar en la opción *Control de un lazo cerrado simple*.
- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
  - C-1 → P+D;  $G = 4 / Td = 0 / C = 80 / Ca = 80$
  - P-1 → Retardo de primer orden;  $T = 0,3 / K = 3 / Be = 65 / Bs = 80$
  - U-v → Ganancia;  $K = 0,451389 / U = 72 / Ua = 72 / Espera = 30$
  - U-1 → Ret. 1er. orden;  $T = 0,3 / K = 1,5 / U = 75 / Ua = 75 / Espera = 30$
  - M-1 → Retardo de primer orden;  $T = 0,15 / K = 1 / Z = 0$

Prestar atención a las ganancias que se han dado para los bloques, y nótese que no hemos fijado ningún salto en el punto de consigna ni en las perturbaciones.

- Continuar con:
  - Duración* = 4,5
- Pulsar C/U y seleccionar:
  - Frecuencia de muestreo*:  2 (opción C/U)
- Seleccionar las escalas:
  - Escala de ganancia* : 0 ÷ 2; -6 ÷ +6
  - Escala de ángulos* : -180 ÷ +180
  - Frecuencia inicial* : 0,1; -1
  - Frecuencia final* : 100; +2

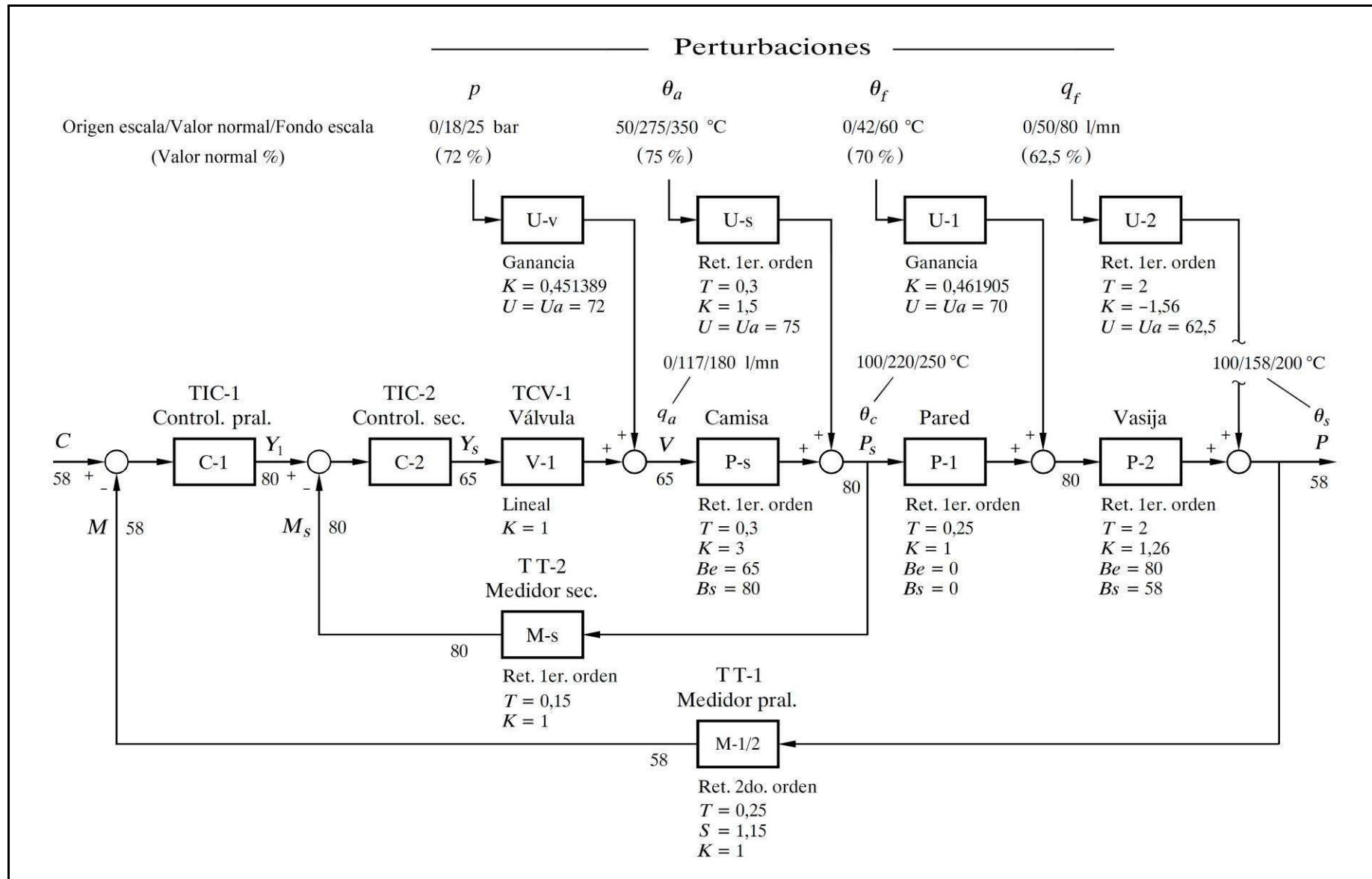


Fig. 9.9 Diagrama de bloques del control de temperatura de un reactor encamisado (Práctica n° 9.2, fig. 9.8, pág. 447 y sigtes.)

## ➤ Modificar:

U-s :  $U = 75$  (anulamos la perturbación de temperatura del fluido térmico)

U-1 :  $U = 20$  (activamos la perturbación de temperatura de entrada del producto)

➤ Ejecutar la *Respuesta temporal*.

Se han podido tomar los siguientes datos:

Primer pico del proceso  $P \approx 50,7$

Primer pico de la medida  $M \approx 52,2$

Valor final alcanzado  $M = P \approx 54,3$

Desviación permanente  $\varepsilon_p \approx -3,6$

## ➤ Modificar:

U-1 :  $U = 70$  (anulamos la perturbac. de temperatura entrada producto)

U-2 :  $U = 12,5$  (activamos la perturbación de caudal de entrada de producto)

➤ Ejecutar la *Respuesta temporal*.

Se han podido tomar los siguientes datos:

Primer pico del proceso  $P \approx 77,5$

Primer pico de la medida  $M \approx 73,6$

Valor final alcanzado  $M = P \approx 67,8$

Desviación permanente  $\varepsilon_p \approx 9,78$

A continuación se expone un resumen de las características de las respuestas que hemos obtenido, incluyendo los valores de *rebasamiento máximo* referenciados al valor de la *consigna C* del 58%. (Nótese los picos: [ $\downarrow$ ] = *valle*; [ $\uparrow$ ] = *cresta*).

| ▪ <i>Tipo de perturbación</i>                    | Control en lazo simple | Control en cascada |
|--|------------------------|--------------------|
| • Variables registradas<br>Variables calculadas  |                        |                    |
| ▪ <i>Perturbación de presión</i>                 |                        |                    |
| • Primer pico del proceso, $P$ [ $\downarrow$ ]  | 24,6                   | 56,4               |
| Rebasamiento del proceso, $P - C$                | -33,4                  | -1,6               |
| • Primer pico de la medida, $M$ [ $\downarrow$ ] | 27,1                   | 56,7               |
| Rebasamiento de la medida, $M - C$               | -30,9                  | -1,3               |
| • Valor final alcanzado, $M = P$                 | 36,8                   | 57,2               |
| Desviación permanente, $\varepsilon_p = P - C$   | -21,2                  | -0,8               |
| ▪ <i>Perturbación temperat. fluido térmico</i>   |                        |                    |
| • Primer pico del proceso, $P$ [ $\downarrow$ ]  | 21,0                   | 56,3               |
| Rebasamiento del proceso, $P - C$                | -37,0                  | -1,7               |
| • Primer pico de la medida, $M$ [ $\downarrow$ ] | 23,8                   | 56,6               |
| Rebasamiento de la medida, $M - C$               | -34,2                  | -1,4               |
| • Valor final alcanzado, $M = P$                 | 34,5                   | 57,1               |
| Desviación permanente, $\varepsilon_p = P - C$   | -23,5                  | -0,9               |

(Continúa...)

|  |       |      |
|--|-------|------|
| ▪ <i>Perturbación temperat. del producto</i>   |       |      |
| • Primer pico del proceso, $P$ [↓]             | 45,8  | 50,7 |
| Rebasamiento del proceso, $P - C$              | -12,2 | -7,3 |
| • Primer pico de la medida, $M$ [↓]            | 46,8  | 52,2 |
| Rebasamiento de la medida, $M - C$             | -11,2 | -5,8 |
| • Valor final alcanzado, $M = P$               | 50,8  | 54,3 |
| Desviación permanente, $\varepsilon_p = P - C$ | -7,2  | -3,6 |
| ▪ <i>Perturbación de caudal de producto</i>    |       |      |
| • Primer pico del proceso, $P$ [↑]             | 90,7  | 77,5 |
| Rebasamiento del proceso, $P - C$              | 32,7  | 19,5 |
| • Primer pico de la medida, $M$ [↑]            | 88,0  | 73,6 |
| Rebasamiento de la medida, $M - C$             | 30,0  | 15,6 |
| • Valor final alcanzado, $M = P$               | 77,4  | 67,8 |
| Desviación permanente, $\varepsilon_p = P - C$ | 19,4  | 9,8  |

La tabla expresa por sí misma las ventajas de la configuración de control en cascada. Cuando en este tipo de control las perturbaciones entran por el lazo secundario, los valores de los rebasamientos y de la desviación permanente son reducidos drásticamente. Cuando las perturbaciones entran por el lazo principal, son reducidos aproximadamente a la mitad, lo que demuestra que el control en cascada mejora la respuesta incluso para este tipo de perturbaciones. Si se aumenta la ganancia del controlador secundario, los resultados son todavía más espectaculares.

A partir de aquí se recomienda al lector que ensaye las variantes y las modificaciones de parámetros, que se citan a continuación, comprobando si es o no ventajosa la configuración en cascada. En muchos casos será conveniente la ayuda que presta el Análisis frecuencial para determinar la optimización del sistema.

- Introducir acción integral en uno y otro de los dos controladores, y acción derivativa en el principal. Recuérdese que, en general, no es admisible la acción derivativa en el secundario.
- Aumentar la constante de tiempo de alguno de los componentes del lazo secundario hasta valores similares a la mayor constante de tiempo del lazo principal.
- Introducir un tiempo muerto, ya sea en algún proceso o en el medidor del lazo principal. En el primer caso será preciso reagrupar dos retardos de tiempo de primer orden en uno de segundo, tal como se hizo en la práctica n° 9.1 (pág. 441). Efectuar un solo cambio a la vez.
- Introducir una alinealidad en el lazo secundario, seleccionando la válvula de tipo isoporcentual.
- Introducir una alinealidad en el lazo principal, seleccionando el bloque medidor M-1 de tipo cuadrático. Probar con distintos valores de consigna.



- Modificar diversas ganancias y parámetros de los bloques *Proceso*, así como de los bloques *Perturbación* (un solo cambio a la vez).
- Comprobar, en todos los casos, la respuesta frente a la aparición de las perturbaciones en forma de rampa, utilizando la opción *C/R* y ejecutando la respuesta en la opción *Rampas programadas*. Téngase en cuenta que, como aproximación, esta es una situación bastante frecuente en los procesos reales y que puede ser considerada como normal.
- Se ensayarán también los efectos producidos en ambos tipos de configuración cuando cambia la física de alguno de los bloques; lo que se traduciría, por ejemplo, en cambios de la ganancia estática de algún componente, en la conversión de un retardo de primer orden en uno de segundo, etc.

### Práctica n° 9.3

En este mismo capítulo se ha mencionado que en un sistema de control en cascada el lazo secundario puede ser inestable y, no obstante, el sistema global ser estable. Debemos ahora añadir que, en este supuesto, el comportamiento del citado lazo secundario pasa a ser el de un lazo estable; es decir, que ninguna de sus variables presenta oscilación alguna o, si las presenta, después de una perturbación, son oscilaciones amortiguadas. Algo así como si se “contagiara” de la estabilidad global (más bien podría hablarse de una “inmunización”). Dado lo curioso del fenómeno y que, por otra parte, no resulta ni mucho menos intuitivo, y sí muy didáctico, creemos interesante proponer un ejercicio práctico sobre este particular.

En la práctica 8.7 (pág. 382) vimos que un control proporcional de un proceso formado por tres retardos de tiempo de primer orden, con idéntico valor de la constante de tiempo en cada uno, se encuentra situación crítica si la ganancia estática del lazo vale 8; es decir, se tiene  $K_{\max} = 8$ . Esto significa que si, por ejemplo, se asigna al controlador una ganancia de 10 (asumiendo una ganancia estática igual a 1 en el resto de los bloques del lazo), se tendrá un sistema claramente inestable.

Vamos a configurar un sistema de control en cascada, en el que el lazo secundario se corresponda con esta descripción, y verificaremos que es posible hacer que el sistema sea estable.

- Entrar en la opción *Control en cascada*.
- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
  - C-1 → P+D;  $G = 1 / Td = 0 / C = 50 / Ca = 40$
  - C-s → P+D;  $G = 8 / Td = 0$
  - V-1 → Retardo de primer orden;  $T = 0,25 / K = 1$

interés, especialmente porque al aumentar la frecuencia crítica del sistema la estabilización se alcanza con mayor rapidez y disminuye considerablemente el error integral. En la propia práctica 9.2 se ha visto que el tiempo necesario para poder leer la desviación permanente (con la suficiente estabilidad en la lectura), se reducía de manera considerable en el control en cascada.

Concretamente, el factor de “mejora” para la desviación permanente, con relación a la perturbación de temperatura de entrada del producto, sería

$$f = \left[ \frac{K_4}{1 + K_1 K_3 K_4} \right]_{\text{simple}} \Bigg/ \left[ \frac{K_4 (1 + K_2 K_3)}{1 + K_2 K_3 + K_1 K_2 K_3 K_4} \right]_{\text{cascada}} =$$

$$= \frac{1 + 4 \times 3 + 6 \times 4 \times 3 \times 1,26}{(1 + 0,8 \times 3 \times 1,26) (1 + 4 \times 3)} = 1,9827 \quad (K_{1(\text{simple})} = 0,8; K_{1(\text{casc.})} = 6)$$

que, según podemos comprobar, concuerda con los datos obtenidos, expuestos en la tabla de comparación (págs. 472 y 473.).

## 9.2 Control en adelanto

La configuración de *control en adelanto*, también llamado *control anticipatorio* (*feedforward* en inglés), se utiliza cuando en los procesos lentos actúan fuertes cambios de carga o perturbaciones que hacen difícil o imposible mantener la variable controlada dentro de unos márgenes de desviación especificados. Como ya es sobradamente conocido, cuando se produce una perturbación en un control realimentado en lazo sencillo, el controlador no inicia las acciones correctoras hasta que el proceso sufre el efecto de la perturbación y ello es detectado por el dispositivo medidor (sensor y transmisor). Sucede que, en determinados casos, en procesos de evolución lenta o con tiempo muerto importante, esta acción llega demasiado tarde, cuando la desviación ya ha alcanzado valores inadmisibles.

La solución está en anticiparse al efecto nocivo que produce la perturbación, contrarrestándola antes de que alcance al proceso. Para ello, el control en adelanto utiliza la medida directa de la perturbación (variable perturbadora) para ajustar el valor de la variable manipulada, de tal manera que se compense o mitigue, dentro de lo posible, el citado efecto. Téngase en cuenta que una perturbación es un cambio inevitable y sin control en una entrada del sistema, mientras que la variable manipulada es una variable sometida a control (por el controlador y la válvula). Es por estas razones que esta configuración de control puede ser llamada, más estrictamente, *control con compensación en adelanto*.

Es, por tanto, condición imprescindible que las perturbaciones o los cambios de carga puedan ser identificados y medidos. Por las razones que se verán más adelante, el control en adelanto es siempre un complemento del control en realimentación.

De manera muy esquemática y conceptual, y a efectos comparativos, la figura 9.11 muestra la filosofía del funcionamiento de un control en realimentación (lazo sencillo) y de un control en adelanto, ambos afectados por una perturbación.

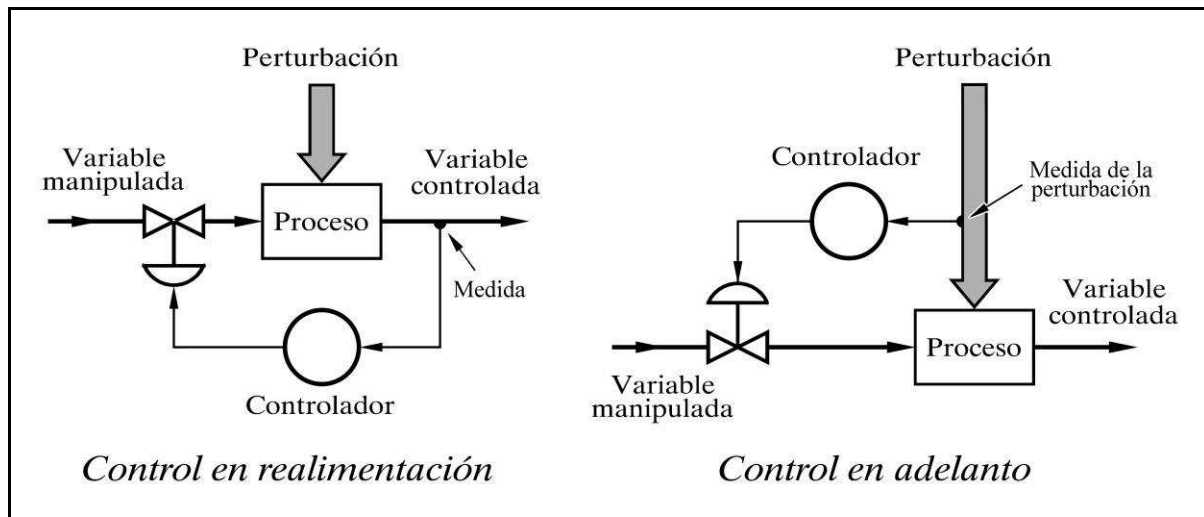


Fig. 9.11 Comparación entre un control en realimentación y un control en adelanto

Nótese que en la configuración de control en adelanto, no existe ningún tipo de realimentación (y en particular desde la variable controlada al sistema de control). Es un control en lazo abierto. Esto significa que cualquier otra perturbación que alcance al proceso causará alteraciones en el mismo, que no serán detectadas por el sistema de control. Por otra parte, la instrumentación presenta siempre cierto grado de imprecisión intrínseca y de calibración, derivas con el tiempo, etc. Por estas razones, y por la necesidad de poder fijar cómodamente el punto de consigna, es por lo que, en general, es preciso complementar el control en adelanto con el control en realimentación, en una configuración compuesta. En este texto, y así se hace comúnmente, entenderemos por *control en adelanto* la citada combinación. La figura 9.12 muestra, en síntesis, la conjugación de ambos métodos.

La válvula de control, reguladora de la variable manipulada, recibe la señal correctora de un sumador, compuesta por la señal del controlador en realimentación y por la señal del controlador en adelanto. De este modo, las correcciones oportunas para compensar la perturbación son anticipadas por el controlador en adelanto, y si por cualquier causa (incluso por las imperfecciones del propio control en adelanto) surge una desviación en la variable controlada, el controlador en realimentación convencional se ocupa de efectuar la corrección adicional pertinente.

Si bien estamos utilizando la expresión “controlador en adelanto”, este dispositivo no será necesariamente un controlador en el sentido convencional, sino que puede ser cualquier dispositivo de cálculo (analógico o digital) capaz de generar una señal correctora adecuada a partir de la señal de medida de la variable perturbadora,

de acuerdo con un algoritmo o función matemática específica. Dicha función dependerá de la composición y de las características de los bloques que forman el sistema; en definitiva, de la *relación funcional* entre la respuesta de la *variable controlada* y la *variable perturbadora*, según veremos a continuación.

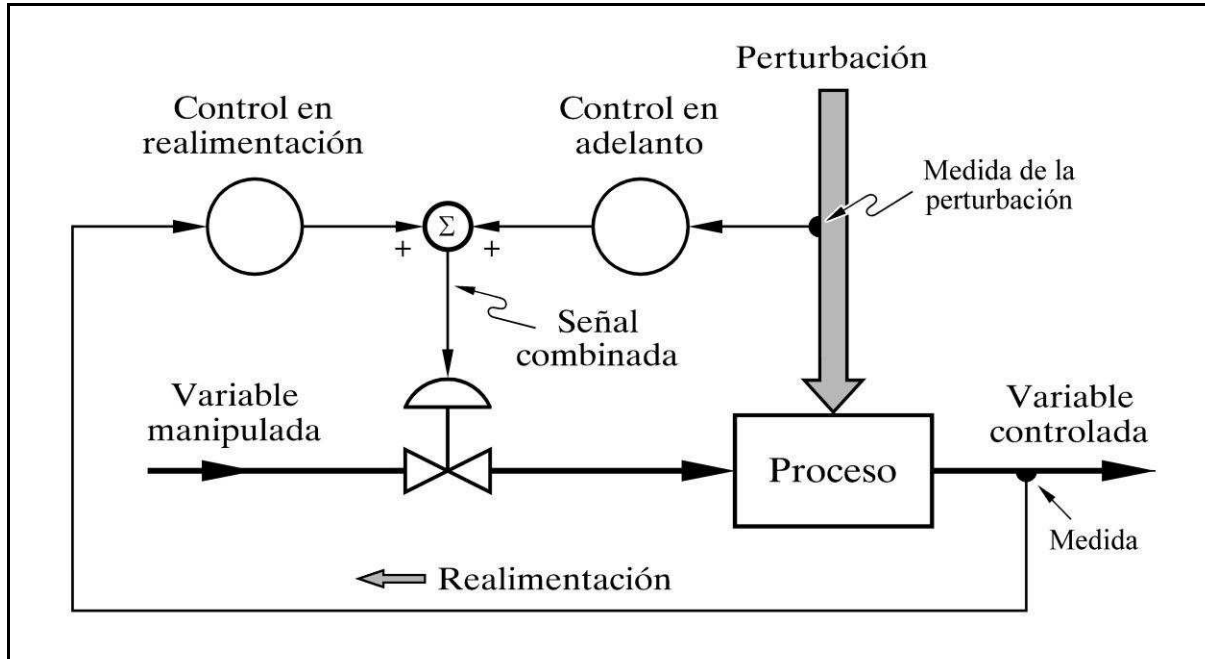


Fig. 9.12 Combinación de control en realimentación y control en adelanto

### 9.2.1 Ecuaciones del control en adelanto

Se trata de hallar la ecuación o función matemática que debe llevar a cabo el dispositivo de compensación del control en adelanto.

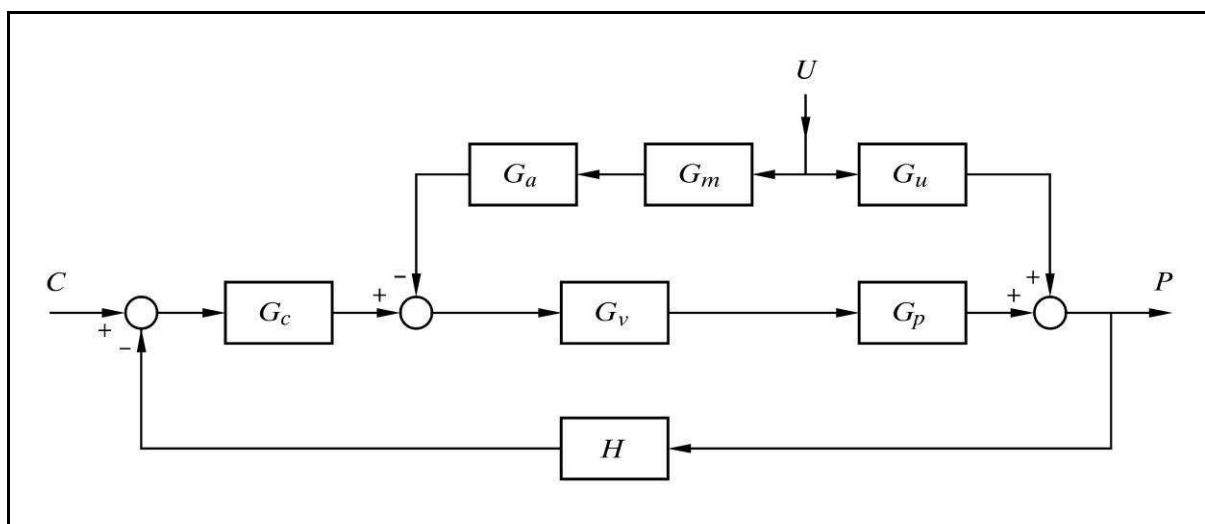


Fig. 9.13 Diagrama de bloques de un control en adelanto

La figura 9.13 muestra esquemáticamente un diagrama de bloques generalizado de un sistema con control en adelante, en el que pueden observarse los bloques con la siguientes transmitancias:

$G_c$  : Controlador (en realimentación)

$G_v$  : Válvula de control

$G_p$  : Proceso

$H$  : Medidor de la variable controlada

$G_u$  : Perturbación

$G_m$  : Medidor de la variable perturbadora

$G_a$  : Compensador del control en adelante (controlador)

Vemos que la señal perturbadora  $U$  sigue dos caminos diferentes para llegar a la salida  $P$ : el que podríamos llamar camino normal, a través del bloque perturbación,  $G_u$ , y el camino a través del sistema de compensación,  $G_m$  y  $G_a$ . La ecuación que relacionará la salida  $P$  con la perturbación  $U$ , contemplará, por el principio de superposición, la composición de las señales procedentes de los dos caminos; es decir, la suma de los dos efectos.

El efecto debido al camino normal, sabemos que es

$$P_{(u)} = U \frac{G_u}{1 + G_c G_v G_p H}$$

y, recordando las sencillas reglas dadas en el apartado 8.3.1 (pág. 355), obtenemos la expresión del efecto producido por el camino de compensación en adelante

$$P_{(a)} = U \frac{-G_m G_a G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p H}$$

de donde el efecto combinado será la suma de ambos

$$P = P_{(u)} + P_{(a)} = U \frac{G_u - G_m G_a G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p H}$$

Ahora, y esto es lo importante, si se consigue que la fracción de la expresión anterior, esto es, el coeficiente de  $U$ , sea nulo, significará que se habrá compensado totalmente el efecto de la perturbación, pues entonces  $P = U \times 0 = 0$ . Para ello, basta con que el numerador sea nulo, es decir,

$$G_u - G_m G_a G_v G_p = 0$$

## Práctica n° 9.4

Efectuaremos un ejercicio práctico de simulación, tomando el ejemplo que se vio más atrás, según se muestra en la figura 9.15 (pág. 488). Resumiendo los datos significativos, se tiene:

- *Datos de diseño:*

Margen de caudal de salida : 0 .. 0,20 m<sup>3</sup>/mn.  
 Capacidad de operación de la válvula : 0 .. 0,25 m<sup>3</sup>/mn.  
 Intervalo de la medida de nivel : 0,40 m

- *Operación normal:*

|                  |     | <u>Sistema real</u>     | <u>Sistema simulado</u> |
|------------------|-----|-------------------------|-------------------------|
| Caudal de salida | $U$ | 0,15 m <sup>3</sup> /mn | 75 %                    |
| Posición válvula | $V$ | 60 %                    | 60 %                    |
| Proceso (nivel)  | $P$ | 0,20 m                  | 50 %                    |

- *Transmitancias de los bloques:*

|                   |       | <u>Sistema real</u> | <u>Sistema simulado</u> |
|-------------------|-------|---------------------|-------------------------|
| Válvula           | $K_v$ | 0,0025              | 1,25                    |
| Proceso           | $G_p$ | 1/(2s)              | 1/(4s)                  |
| Perturbación      | $K_u$ | 1                   | 1                       |
| Medidor perturb.  | $K_m$ | 500                 | 1                       |
| Medidor principal | $H$   | 250                 | 1                       |
| Compensador       | $G_a$ | 0,8                 | 0,8                     |

- *Configuración de los bloques:*

- *Válvula V-1*

Tipo: Lineal (ganancia)

Ganancia  $K = 1,25$

- *Proceso P-2*

Tipo: Integrador

Tiempo de integración  $T_i = 4$

Valor de referencia  $R = 75$  (caudal de equilibrio)

- *Perturbación U-1*
  - Tipo: Ganancia (lineal)
  - Ganancia  $K = 1$
  - Entrada actual (carga)  $U = 75$  (caudal de consumo actual)
  - Entrada anterior  $Ua = 75$  (caudal de consumo normal)
  
- *Medidor de perturbación M-u*
  - Tipo: Ganancia (lineal)
  - Ganancia  $K = 1$
  - Elevac./Supres. de cero  $Z = 0$
  - Selector "U" = 0 (desconectado desde el *Diagrama de bloques*)
  
- *Medidor principal M-1*
  - Tipo: Ganancia (lineal)
  - Ganancia  $K = 1$
  - Elevac./Supres. de cero  $Z = 0$
  
- *Compensador A-2*
  - Tipo: Controlador P+D
  - Ganancia  $K = 0,8$
  - Tiempo derivativo  $Td = 0$
  - Selector "A" = 0 (desconectado desde el *Diagrama de bloques*)

Nótese que por el momento dejaremos la posición de ambos selectores (medidor de perturbación "U" y selector del punto de compensación "A") en 0, lo que significa que la acción compensadora quedará desactivada. Esto nos permite observar la respuesta del sistema, desprovisto de compensación, y luego compararla con la respuesta que se obtiene una vez es activada la compensación.

### **Nota importante**

Hay que hacer notar que la medida de la perturbación se representa en pantalla (línea color gris) según su valor absoluto y se refiere a la medida de la diferencia  $|U - Ua|$ . De este modo, aparece siempre en pantalla, sea cual fuere su signo. Por otra parte, la señal de compensación (línea color azul oscuro) se representa desplazada positivamente, tomando como referencia *cero* el 50% de la escala; es decir, que cuando su valor es nulo se sitúa en la mitad de la escala, de tal manera que los valores positivos y negativos quedarán representados por encima y por debajo del 50%, respectivamente. De esta forma, también queda siempre representada en pantalla si su valor se halla comprendido entre los

límites  $-50\% \dots +50\%$  (razonablemente, puede esperarse que, por lo general, se encuentre dentro de este intervalo). Téngase presente que la señal de compensación puede ser tanto positiva como negativa, lo cual producirá un aumento o una disminución, respectivamente, de la señal del controlador principal, según corresponda por la perturbación de cada momento y por toda la dinámica asociada. En la práctica, se añade a la señal una desviación fija (bias) del  $50\%$ , que luego es deducida en el sumador, evitándose así trabajar con señales negativas. No obstante, en el panel inferior de visualización digital de los valores de las variables, dichas señales son mostradas, en todos los casos, con su verdadero valor y signo.

### Instrucciones

- Entrar en la opción *Control en adelante (feedforward)*.
- Pulsar el botón [Bloques nulos].
- Preparar la siguiente configuración:
  - C-1 → P+D;  $G = 1 / Td = 0 / C = 50 / Ca = 50$
  - V-1 → Lineal;  $K = 125$
  - P-2 → Integrador;  $T = 4 / R = 75$
  - U-1 → Ganancia;  $K = -1 / U = 75 / Ua = 75 / Espera = 60$  (¡K negativo!)
  - M-u → Ganancia;  $K = 1 / Z = 0$
  - M-1 → Ganancia;  $K = 1 / Z = 0$
  - A-2 → Controlador P+D;  $K = -0,8 / Td = 0$  (¡K negativo!)
  - Selector "A" = 0 y Selector "U" = 0 (desde el *Diagrama de bloques*)

Los signos negativos en las ganancias de U-1 y A-2 son necesarios porque la perturbación es de tipo sustractivo y, en consecuencia, la compensación tiene que ser aditiva; mientras que los signos que el programa *ControlP* tiene asumidos por defecto, son precisamente los contrarios a estos (ver el *Diagrama de bloques*).

- Asignar:
  - Duración* = 20
- Seleccionar las escalas:
  - Escala de ganancia* :  $0 \div 2; -6 \div +6$
  - Escala de ángulos* :  $-180 \div +180$
  - Frecuencia inicial* :  $0,1; -1$
  - Frecuencia final* :  $100; +2$
- Ejecutar la *Respuesta temporal*.

Se obtienen unas líneas planas que nos muestran los valores de las variables estando el sistema en equilibrio, sin cambios en el punto de consigna y sin perturbación alguna.



$$\frac{Y}{X} = \frac{G_v G_p}{1 + G_v G_p} = \frac{1}{1 + 3,2 s}$$

Para una entrada  $X$  en escalón de amplitud  $A$ , cuya función laplaciana es  $A/s$ , se tiene que la respuesta es

$$Y = X \frac{1}{1 + 3,2 s} = \frac{A}{s(1 + 3,2 s)}$$

la cual, de acuerdo con las tablas de transformadas de Laplace, proporciona la respuesta temporal

$$y = A \left( 1 - e^{-t/3,2} \right)$$

que nos confirma el tipo de respuesta exponencial con una constante de tiempo de 3,2 minutos, lo cual habrá sido evidente desde el momento en que se tenía la expresión laplaciana de la relación  $Y/X$ .

- Modificar (desde el *Diagrama de bloques*):
  - Selector "U" = 1 (conectamos la compensación)
  - Selector "A" = 2 (la aplicamos después del *Controlador*)
- Ejecutar nuevamente la *Respuesta temporal* y efectuar la comparación.

Se observa que la respuesta es más enérgica, y que muestra una exponencial con una constante de tiempo menor y, por tanto, más parecida al escalón. El seguimiento no es perfecto, porque tampoco lo es el sistema de compensación, pero ha mejorado notablemente.

## Práctica n° 9.5

Sea un calentador en el que se pretende calentar, mediante vapor, un producto en circulación. El proceso está sometido a fuertes cambios de carga y perturbaciones, debido a que se producen importantes variaciones, tanto del caudal de circulación del producto como de su temperatura de entrada. Puesto que ambas variables perturbadoras son perfectamente medibles, se implantará un control de temperatura con compensación en adelanto de las dos perturbaciones, según se esquematiza en la figura 9.18. En ella que se muestra una configuración que sería común para ambas perturbaciones. Obviamente, en un caso se tendrá un transmisor de caudal (FT-2) y en el otro un transmisor de temperatura (TT-2).

Se hallará la solución del correspondiente dispositivo de compensación para cada una de las dos perturbaciones. Las respuestas se analizarán por separado, tal

como se ha hecho en prácticas anteriores. Es evidente que en un sistema real que contemplase simultáneamente las dos opciones, el sumatorio recibiría, además de la señal de salida del controlador principal, las señales de cada uno de los dispositivos de compensación (sumatorio con tres entradas). La posición de la válvula sería la originada por el efecto combinado de las tres acciones correctoras: *a*) por realimentación, vía controlador, como consecuencia de la desviación; *b*) por cambios de caudal de circulación, y *c*) por cambios de temperatura de entrada.

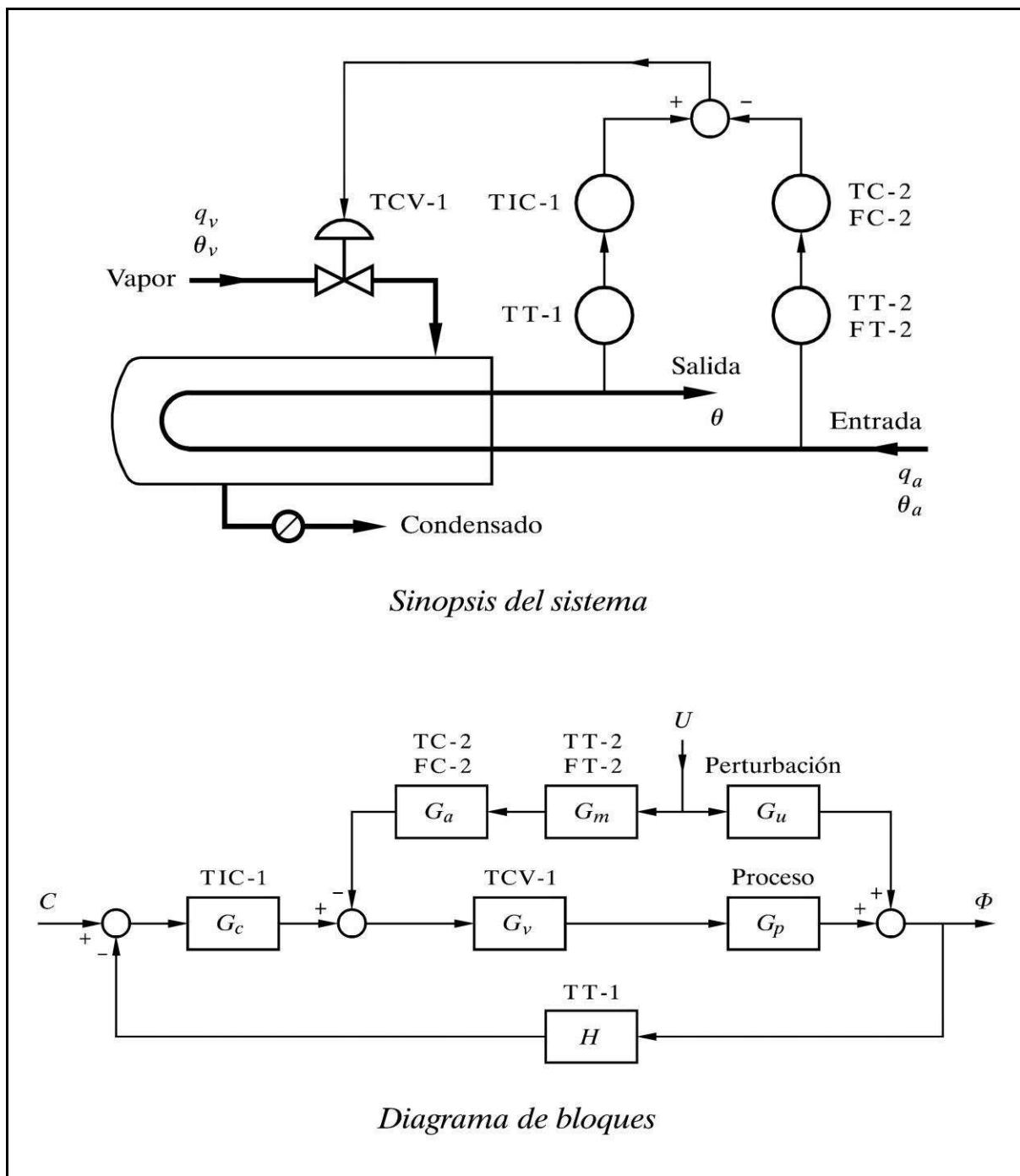


Fig. 9.18 Control de temperatura en adelanto en un calentador

## 7 Manejo del parámetro “Elevac./Supres. de cero Z”

En los componentes del tipo *Ganancia* o *Retardo de tiempo* de los bloques *Medida* se dispone de un parámetro denominado *Elevac./Supres. de cero Z*. Este parámetro permite la supresión o elevación (deslizamiento) del margen de operación de la variable de entrada, con relación al margen de medida. Ello es equivalente a la denominada *supresión o elevación de margen*. Dependiendo de los fabricantes de instrumentos se utiliza una u otra nomenclatura, que, en cualquier caso, suele prestarse a confusiones. En el programa *ControlP* se ha optado por la primera de las nomenclaturas, *Elevación/Supresión de cero*, cuyo significado vamos a clarificar mediante un ejemplo práctico.

Supongamos la clásica medida de nivel de un depósito cerrado, mediante un transmisor de presión diferencial con conexiones directas (sin membranas separadoras). La conexión de la *toma inferior* del depósito (rama de *alta\**), así como el transmisor, se hallan por debajo del nivel *mínimo* o de referencia (nivel definido como del 0 %), mientras que la conexión de la *toma superior* (rama de *baja\**) está por encima del nivel *máximo* (nivel definido como del 100 %). Véase la figura A-2.5. (\*) Forma popular de decir rama de *alta presión* o rama de *baja presión*.

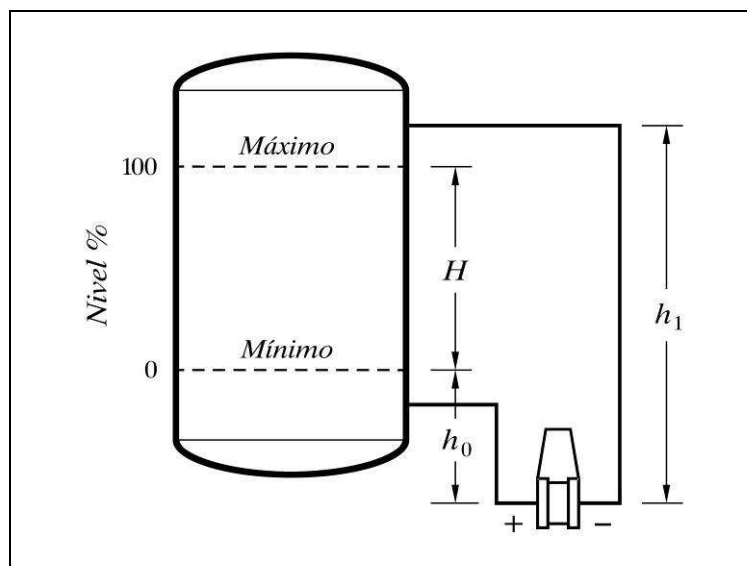


Fig. A-2.5 Medición de nivel por presión diferencial

Básicamente existen dos posibilidades, dependiendo de que en el depósito se produzcan, o no, vapores condensables. En el primer caso la *rama de baja* se llenará espontáneamente de líquido condensado hasta el punto más alto de la conducción (lo que se denomina *rama húmeda*) y, por tanto, por encima del que hemos llamado nivel máximo. En el segundo caso, dicha rama permanecerá vacía (seca). Es obvio que en ambos casos la *rama de alta* estará siempre llena.

Asumiendo, para simplificar, un líquido de densidad relativa 1, la siguiente tabla muestra las *presiones diferenciales netas* recibidas por el transmisor; en ambos casos, para los niveles del proceso definidos como *mínimo* (0%) y *máximo* (100%).

|                 | Nivel 0%    | Nivel 100%      |
|-----------------|-------------|-----------------|
| Condensables    | $h_0 - h_1$ | $H + h_0 - h_1$ |
| No condensables | $h_0$       | $H + h_0$       |

En el caso de *vapores condensables* vemos que la presión diferencial neta es siempre *negativa*, incluso cuando el nivel se halla en su máximo valor del 100%; es decir, que  $h_1 > (H + h_0)$  o bien  $(H + h_0 - h_1) < 0$ . En el otro caso, para *vapores no condensables*, la presión diferencial es siempre *positiva*, incluso cuando el nivel está en el mínimo del 0%. Las gráficas de la figura A-2.6 muestran estas presiones en función del nivel, y las señales de transmisión que van a proporcionar.

El intervalo de presión diferencial es en ambos casos el mismo, precisamente el valor de la altura  $H$ , pero se encuentra desplazado, en un caso hacia el lado negativo, y en el otro hacia el positivo. Si el transmisor generase una señal proporcional al valor real de la presión diferencial que recibe, es evidente que en los dos casos se tendría una señal completamente falseada. Es preciso efectuar un desplazamiento en la señal de transmisión; pero es más racional decir que dicho desplazamiento hay que efectuarlo en el propio margen de medida (y así es como se logra en la práctica). Podemos imaginar que a la *cámara de alta* del transmisor le *añadimos* o *sustrae-mos*, de alguna manera (por ejemplo mediante un resorte), una presión adicional, sin interferir en el proceso; es decir, que *elevamos* o *suprimimos*, respectivamente, en cierta cuantía, el límite inferior o *cero* del margen de medida (desplazándolo en su totalidad), hasta conseguir que para *nivel cero* la presión diferencial neta (virtual) en el transmisor sea nula.

Así, en nuestro ejemplo, en el caso de vapores *condensables* debemos *elegir el cero* de la medida, justo en la cantidad  $|h_0 - h_1| = h_1 - h_0$ , con lo que para un nivel mínimo tendremos una presión diferencial (virtual) nula, y con un nivel máximo una presión diferencial (virtual) de valor  $H$ . Con ello, la señal de medida, proporcional a estas presiones, ya será representativa de la variable nivel. Por el contrario, en el caso de vapores *no condensables*, tenemos que *suprimir el cero* de la medida, justo en la cantidad  $h_0$ , para conseguir los mismos efectos (véase la figura A-2.6).

Nótese que en todos los casos, es irrelevante la posición de la toma de alta, con la condición de que esté situada por debajo del nivel mínimo. Asimismo, el *campo* o *intervalo de medida* del transmisor (*span*) será en cualquier caso de valor  $H$ , lo que se comprueba efectuando la diferencia entre las dos columnas de la tabla.

En la práctica, los transmisores de presión diferencial pueden venir preparados para llevar a cabo esta función. En el programa de *ControlP* lo podemos simular fijando el valor del parámetro *Elevac./Supres. de cero Z*, una vez determinado el escalado, según se ha visto en este apéndice. Para conseguir un efecto de *elevación* se dará al parámetro un *valor positivo*, y para conseguir un efecto de *supresión* se le asignará un *valor negativo*.

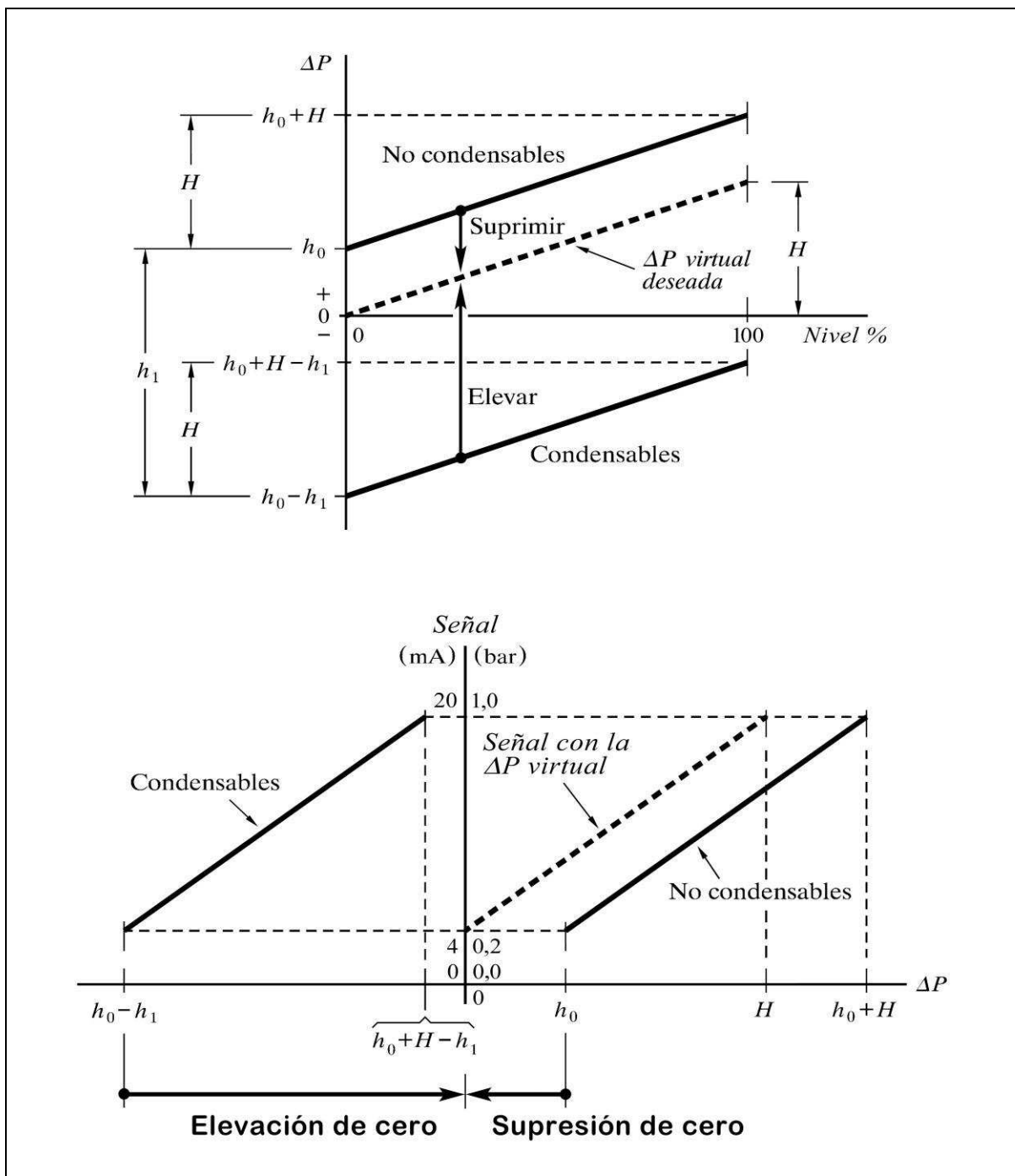


Fig. A-2.6  $\Delta P$  y señales del transmisor de nivel

Descomposición de la respuesta temporal

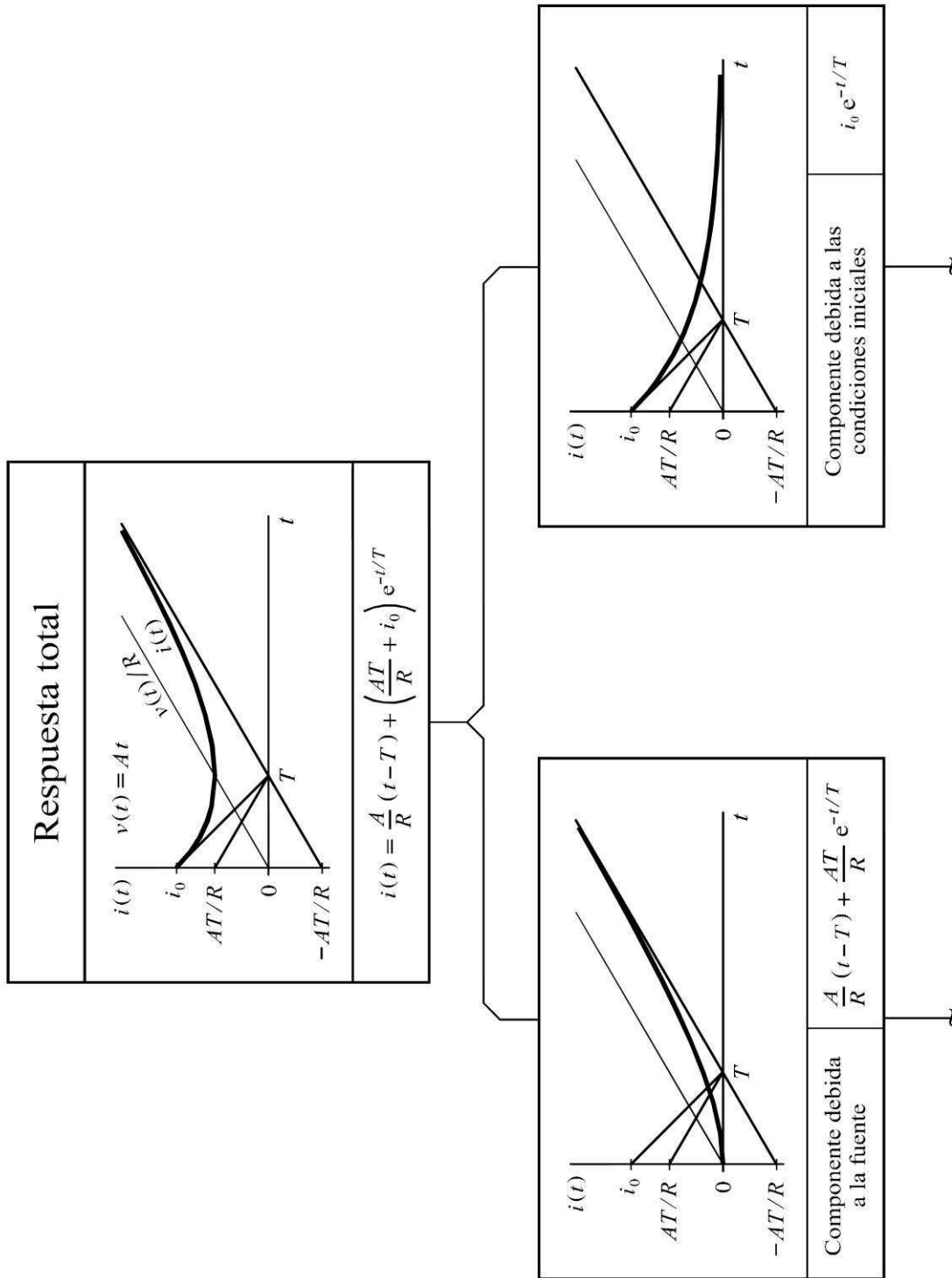
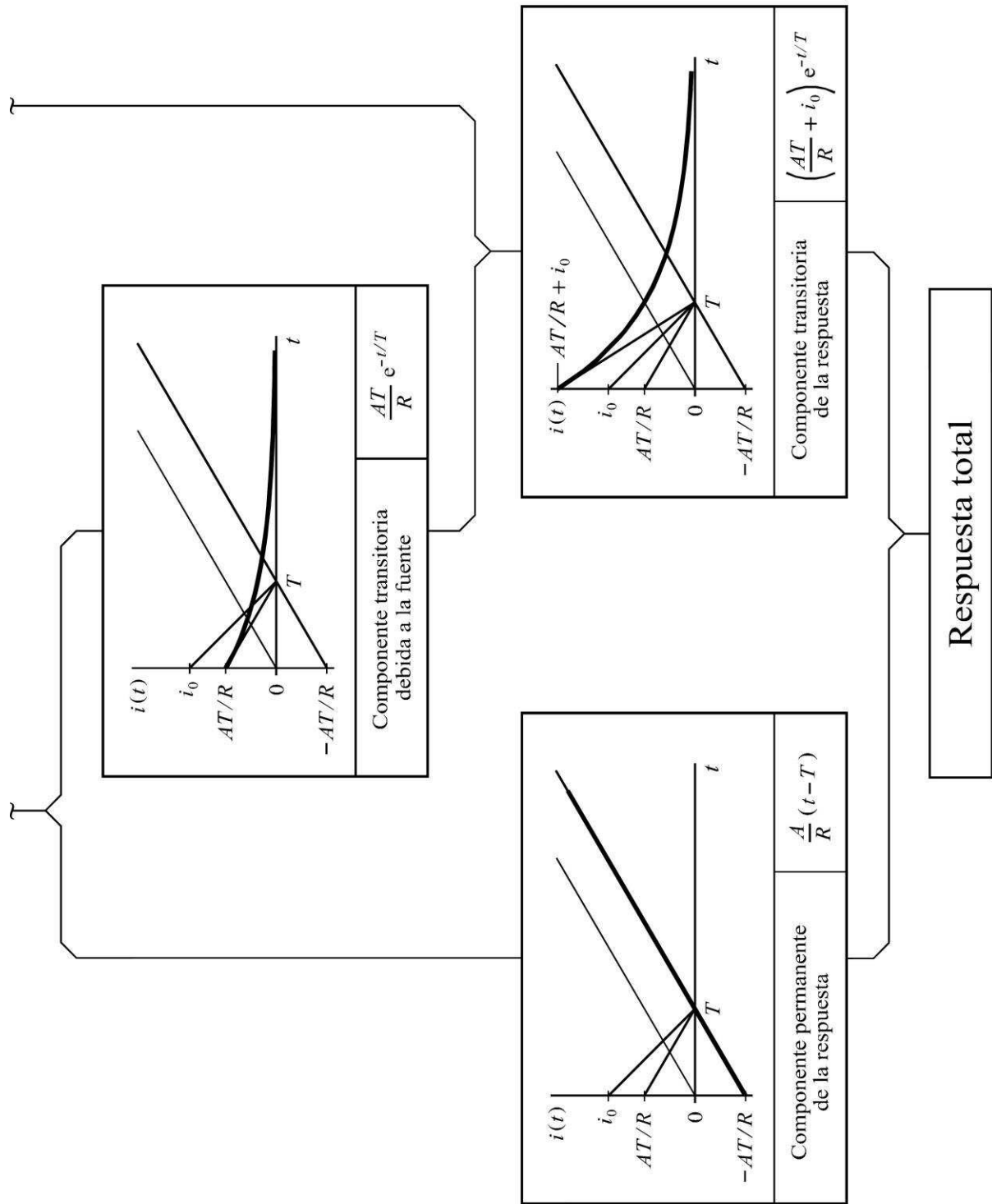


Fig. A-3.2



Descomposición de la respuesta temporal