

# MODELACIÓN-GRAFICACIÓN PARA LA MATEMÁTICA ESCOLAR

*Liliana Suárez Téllez*



Primera edición: 2014

© Liliana Suárez Téllez

© Ediciones Díaz de Santos

Reservados todos los derechos.

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

Ediciones D. D. S. México

Elisa 161, Col. Nativitas, C. P. 03500

Delegación Benito Juárez, México, D. F.

[jnicasio@diazdesantosexico.com](mailto:jnicasio@diazdesantosexico.com)

<http://www.diazdesantosexico.com>

Ediciones Díaz de Santos

C/ Albasanz 2, 28037, Madrid, España

[jmdiaz@editdiazdesantos.com](mailto:jmdiaz@editdiazdesantos.com)

<http://www.editdiazdesantos.com/>

ISBN: 978-84-9969-614-0

Corrección ortográfica y de estilo: Adriana Guerrero Tinoco.

Diseño de portada e interiores: Aarón González Cabrera.

Fecha de edición: febrero 2014.

*Impreso y hecho en México.*

*La edición de este libro se llevó a cabo con el apoyo del  
Instituto Politécnico Nacional al proyecto:  
Uso de los resultados de la investigación educativa  
para un diseño curricular (Registro SIP: 20130198).*



# ÍNDICE

<b>Prólogo</b> .....	13
<b>Introducción</b> .....	17
<b>Capítulo 1</b> .....	23
Antecedentes .....	25
La graficación como objeto de estudio en Matemática Educativa .....	37
Discusión: hacia una epistemología del uso de las gráficas .....	46
La investigación .....	48
<b>Capítulo 2</b> .....	51
Socioepistemología. Aspectos del marco teórico .....	53
La problemática .....	54
La resignificación de conocimiento y el desarrollo de prácticas .....	56
Reconocimiento de categorías de conocimiento que <i>a priori</i> no están en el currículo .....	58
Socioepistemología del Cálculo .....	60
La modelación desde una perspectiva de prácticas sociales .....	63
Discusión .....	64

<b>Capítulo 3</b> .....	67
Elementos teóricos de la práctica	
de modelación-graficación .....	69
La graficación como múltiples realizaciones .....	71
La graficación como ajuste en una estructura	
para producir un patrón deseable. ....	72
La graficación como un medio que soporta	
el desarrollo del razonamiento y la argumentación .....	74
Discusión: de la modelación-graficación	
en situaciones de modelación del movimiento .....	74
<b>Capítulo 4</b> .....	77
Una práctica de modelación-graficación. ....	79
Uso de las gráficas en la figuración	
de las cualidades. ....	80
La figuración de las cualidades en el <i>Tractatus</i>	
<i>de configurationibus qualitatum et motuum</i> de Oresme .....	82
Pertinencia didáctica del uso de las gráficas	
en la modelación. Tres datos epistemológicos .....	93
Epistemología del desarrollo del uso	
de las gráficas en la modelación. ....	97
Integración de una epistemología del uso	
de las gráficas para la modelación .....	103
Elementos para un diseño de situación	
de modelación del movimiento. ....	104
<b>Capítulo 5</b> .....	115
Situación de Modelación del Movimiento.	
Aspectos metodológicos .....	117
Diseño de una situación de modelación	
del movimiento. ....	118
Consideraciones para la puesta en escena. ....	121
Los estudiantes y la dinámica. ....	121
Etapas previas de familiarización e instrumentación ...	123
La secuencia de tareas .....	125
Actividad de aprendizaje. ....	129
Análisis de datos .....	130

Análisis <i>a priori</i> : lo hipotético. . . . .	131
Análisis <i>a posteriori</i> : lo que realmente hicieron los estudiantes. . . . .	133
Confrontación: evidencias sobre el diseño de la situación de modelación del movimiento. . . . .	149
Hacia una resignificación del cambio y la variación . . . . .	156
Desarrollo de nuevas formas y funcionamientos del uso de las gráficas en la modelación . . . . .	157
<b>Capítulo 6</b> . . . . .	163
A manera de conclusión . . . . .	165
Reorganización del contenido matemático . . . . .	166
Construcciones teóricas . . . . .	171
<b>Bibliografía</b> . . . . .	175
<b>Apéndices</b> . . . . .	187
Apéndice 1. Cuaderno de experimentos para la modelación gráfica en las matemáticas del bachillerato . . . . .	189
¿Cómo usar este cuaderno de experimentos? . . . . .	189
Representando el movimiento . . . . .	190
Carrera de pelotas . . . . .	193
La sombra veloz. . . . .	197
Área extrema . . . . .	199
Más alto o más ancho . . . . .	202
Gráficas en el deporte . . . . .	205
El carrito saltarín. . . . .	207
La balanza. . . . .	209
Café frío. . . . .	211
Haz tu quiniela. . . . .	215
Referencias . . . . .	217
Apéndice 2. Taller de Modelación en Matemáticas. Sesión 1 . . . . .	219
Exploración con una actividad de temperatura . . . . .	219

Gráficas que obtuvieron los estudiantes (análisis del equipo 1) . . . . .	220
--	-----

Apéndice 3. Taller de Modelación en Matemáticas. Sesión 2 . . . . .	223
Plan de la segunda sesión del Taller de Modelación. . . . .	223
La grabación de video . . . . .	225

## PRÓLOGO

La matemática escolar no tiene un marco de referencia para poder atender la justificación funcional. Su construcción es condición *sine qua non* para poder crear la reciprocidad entre la matemática y el cotidiano. Por esto, es necesario adentrarnos a la construcción social del conocimiento matemático.

Podríamos decir que los modelos educativos, en general, no han logrado relacionar estos dos aspectos. Lo que sucede en uno no sucede en el otro. En particular, si se piensa en la matemática del aula, ésta es diferente a la matemática que sucede en el cotidiano. Para conformar un estatus epistemológico que rinda cuentas del conocimiento matemático en relación con estos dos aspectos, se requiere ubicar una dimensión social que problematice la relación de los dominios disciplinares de la ciencia y de la vida cotidiana.

Por eso importan conceptos en torno al conocimiento como su *institucionalización, sus usos e instrumentos, sus prácticas sociales que norman sus construcciones, el cotidiano, la labor, el trabajo y las acciones humanas, como la identidad*, entre otros.

En clases de Matemáticas, por ejemplo, en el bachillerato, si repasamos los programas de estudio por semestre, nos sorprenderá ver el universo amplio de gráficas de las funciones que supuestamente se genera en seis semestres. Los estudiantes y los docentes del mismo bachillerato viven en un mundo inmerso de ese universo de gráficas. Ambos, en el mejor de los casos, van adquiriendo un dominio de este conocimiento, o en su defecto, nos cuestionamos lo poco que saben de las gráficas a pesar de la dimensión de ese universo: por qué aprenden

tan poco; qué enseña el docente en realidad; qué cosas hacer para que se mejoren los aprendizajes, por mencionar algunas interrogantes.

En todo este embrollo, el centro de la preocupación es lo que se sabe, es decir, qué saben los estudiantes y los docentes del tema matemático en cuestión. Seguramente nunca nos hemos preocupado por tratar de explicar ¿cómo usan las gráficas nuestros alumnos? Nos preocupamos por entender qué saben, pero no nos preocupamos en saber cómo usan ese conocimiento. Cuidamos mucho los conceptos, la inercia y la atención hacia éstos, nos ha obligado a no cuestionarnos sobre los usos. ¿Sabemos cómo usamos el conocimiento matemático?, ¿sabemos cómo una niña o un niño de la primaria usa sus gráficas, cómo las va usando y va desarrollando sus usos? ¿Cómo va resignificando los usos de las gráficas para entender un sistema dinámico de las ecuaciones diferenciales, si es el caso, en algún momento escolar universitario?

Resulta que no existe un indicador que nos informe de esto. No sabemos cómo los niños de la primaria, los jóvenes de la secundaria y bachillerato usan su conocimiento matemático, es más, ni siquiera de los estudiantes universitarios. Lo que siempre nos ha preocupado es lo que saben de conocimiento matemático, pero no así el uso que hacen de éste.

En nuestros ámbitos laborales educativos nos llegan programas innovadores oficiales donde aparecen nuevos conceptos que definen nuevas formas de enseñar, presumiblemente para mejorar los aprendizajes. Por ejemplo, el “conocimiento del cotidiano” y, en nuestro caso, en las clases de Matemáticas. En ese contexto se derivan consignas como “llevar la matemática a la realidad del estudiante” y, todavía más impactante, crear “ambientes de la matemática de todos los días”. Sin duda, la propuesta en sí parece sensata, pero choca con nuestra realidad educativa.

Imaginemos un escenario habitual en educación media, donde el docente tiene que enseñar la parábola en su clase de matemáticas. Un cuestionamiento inmediato al respecto sería: ¿qué quiere decir enseñar la parábola con la matemática de todos los días? Francamente, el docente no tiene un referente para responder a cabalidad, sólo cuenta

con información curricular, esto quiere decir que se vale de una lista explícita con una secuencia temporal de conceptos matemáticos para cubrir el programa del semestre o del año.

Con todo lo anterior, se está cuestionando de manera sustancial a los modelos educativos, los cuales le apostaron a atender al conocimiento desde los conceptos. En consonancia, se desarrolla un currículo que sólo atiende los conceptos de tal forma que los usos fueron soslayados. No existe un referente específico para hablar de una funcionalidad del conocimiento. Sin el conocimiento funcional no podríamos crecer como humanos, éste nutre y ayuda a percibir una realidad diferente, mejora la sensibilidad y a la vez nos hace mejores humanos. Creo que nadie podría negar este hecho social, sin embargo, resulta ser que este hecho verosímil no desempeña ningún papel cuando queremos hablar de enseñar matemáticas y de sus problemas de aprendizaje. Así que tiene sentido que nos hagamos una pregunta: ¿de qué naturaleza es el conocimiento matemático cuándo hablamos de su enseñanza y aprendizaje?

Liliana Suárez, en el presente libro, brinda un ejemplo específico en relación con la modelación y la graficación que contribuye de manera certera a la conformación de ese marco de referencia que presumiblemente favorezca la justificación funcional. Con base en su investigación doctoral (Suárez, 2008) llevada a cabo en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados, formula una epistemología donde se articula la modelación, la graficación y la tecnología; diseña una situación de modelación para favorecer los usos de las gráficas y analiza las producciones matemáticas de estudiantes de bachillerato.

El lector podrá encontrar no sólo una innovación educativa, sino también una contribución a la obra disciplinar de la Matemática Educativa. El binomio Modelación-Graficación (M-G) es un constructo que expresa la funcionalidad del conocimiento matemático en una situación específica: el docente podrá desarrollarla en sus prácticas de enseñanza poniendo en juego la modelación del movimiento en un ambiente tecnológico; se resignificará la variación con el funcionamiento y

la forma del uso de las gráficas al reconocer patrones con múltiples realizaciones.

Creo que este libro es, sin duda, una referencia para articular la funcionalidad de la matemática con la realidad de la gente, labor tan importante para mejorar la educación matemática.

FRANCISCO CORDERO OSORIO

*Mayo, 2013, México, D.F.*

## INTRODUCCIÓN

El interés por la modelación matemática se ha incrementado en tiempos recientes en todas las áreas de conocimiento, y específicamente en educación desde hace unas décadas, debido a los alcances de las matemáticas en su relación con otras ciencias. Existen grupos de investigación en este ámbito, por ejemplo, la ICTMA,<sup>1</sup> que centra su interés en promover las aplicaciones y la modelación en todas las áreas de la educación matemática-escuelas primarias y secundarias, bachillerato y universidades, o el MENS,<sup>2</sup> que desde la Matemática Educativa estudia el rol de la modelación en la construcción de conocimiento matemático.

La concepción misma de modelación está teniendo una revisión dentro de la disciplina de la Matemática Educativa (Blum, 1993). La diversidad de concepciones tensa aspectos conceptuales en las teorías o marcos teóricos que se han construido y se están construyendo.

*“Ofrecemos un marco de referencia para la modelación escolar anclada en la graficación. Para la configuración de este marco de referencia se hace un estudio del uso de las gráficas con el primer tratado donde se recurre a una figuración geométrica de las cualidades, interpretada como una modelación con figuras geométricas de una situación de variación”.*

---

<sup>1</sup> Comunidad Internacional de Profesores de Modelación Matemática y Aplicaciones, ICTMA, por sus siglas en inglés (<http://ictma.net/>).

<sup>2</sup> Grupo de Matemática Educativa del Nivel Superior del Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (<http://ima.ucv.cl/investigacion/modelacion-y-tecnologia/>).

Entre los conceptos más significativos se encuentran *el lenguaje de herramientas* y *el lenguaje de los objetos* (Cordero, 2001; Arrieta, 2003; Confrey, 1999). La tensión consiste en que al seleccionar uno de los lenguajes se obliga a debatir la relación entre la actividad matemática y la actividad humana como marco de referencia del conocimiento matemático.

Dentro de nuestra investigación se adopta a la modelación como una construcción teórica<sup>3</sup> que un individuo realiza al enfrentar una tarea matemática en la que pone en juego sus conocimientos. Y como características propias de esta construcción, la modelación posee su propia estructura, está constituida por un sistema dinámico, la simulación puede llevar a cabo realizaciones múltiples y hacer ajustes en su estructura para producir un resultado deseable, es un medio que propicia el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, busca explicaciones a un rango y enfatiza invariantes, trae una idea en una realización para satisfacer un conjunto de condiciones. En pocas palabras, la modelación es la selección del lenguaje de las herramientas sobre el lenguaje de los objetos.

Es importante considerar que la modelación se basa en determinada analogía, en la correspondencia entre el objeto que se investiga y su modelo, que permite pasar de este último al objeto en cuestión y utilizar los resultados obtenidos mediante los modelos. Éste sólo reproduce algunos aspectos del objeto original, importantes para la investigación, y deja de lado los demás. Sin embargo, en la escuela, la modelación sólo es considerada como una actividad que le da un sentido de aplicación a los conocimientos adquiridos en los distintos cursos de matemáticas. En este uso, el énfasis está en las “aplicaciones reales”, es decir, en acercar la “realidad” y la “matemática”, y se usan estrategias de enseñanza que, por la sola introducción de una tecnología para modelar, determinan ciertos ambientes tecnológicos. Y como resultado de este uso se tiene un conjunto de investigaciones que estudian “el espacio gráfico” que se genera en la modelación. Siendo así, ¿qué ganancia se tendría al introducir en el sistema escolar una categoría sustentada en un binomio

---

<sup>3</sup> Para Ferrater-Mora (1996), el término modelo en epistemología es entendido como una construcción teórica que sirve para interpretar o representar la realidad o una parte de ella.

modelación-graficación, que articule, precisamente, la modelación, la graficación y la tecnología, es decir, una categoría que proporcione una caracterización situacional de actividades ancladas a la graficación en un ambiente tecnológico? En nuestra investigación, el objetivo es la creación de un marco de referencia epistemológico que incorpore los elementos de funcionamiento y forma de uso de las gráficas en la modelación del movimiento, de tal manera que se determine un nuevo “grafismo”, un nuevo uso de las gráficas que resigne la variación asociada a los fenómenos de cambio.

El programa de investigación de la socioepistemología (Cordero, 2008) formula tres conjuntos de relaciones explícitas que buscan la coordinación con los fenómenos educativos. G1. Un primer grupo de relaciones propone cuatro elementos básicos de construcción de conocimiento: 1) significados, 2) procedimientos, 3) procesos-objetos, y 4) argumentos. Este primer conjunto explica cómo se pueden establecer distintas construcciones proponiendo *marcos específicos del Cálculo*. En particular, se destaca la construcción asociada a situaciones de transformación (graficación). G2. Un segundo grupo de relaciones consiste en revisar la epistemología propuesta. A cada construcción se le llama “categoría”, en conjunto, a las categorías se les considera nociones medulares de la reconstrucción de significados del Cálculo en la actividad humana, tienen un carácter funcional del conocimiento matemático y su construcción se relaciona con el uso de herramientas y la modelación. Las categorías son el enlace o el medio que articula a la epistemología a través de la actividad humana y lo que sucede en el salón de clases. G3. Un tercer grupo de relaciones consiste en formular un mecanismo que permita objetivar la epistemología a través de la actividad humana para cualquier relación didáctica. Se trata de hacer explícita la reorganización matemática y hacerla coherente con el fenómeno educativo. La epistemología deberá ser la base del diseño de situaciones y de su implementación.

En este contexto, hay varios motivos para formular el binomio *modelación-graficación*. Las prácticas de modelación y de graficación, por separado, han contribuido a proporcionar acercamientos innovadores al concepto de función (véase Arrieta, 2003 y Leinhardt, Stein y

Zaslavsky, 1990, respectivamente). En los niveles superior y medio superior se han introducido como actividades que desarrollan habilidades de aplicación y visualización de los conceptos matemáticos. En la investigación hay una tendencia actual a destacar la importancia epistemológica de la modelación (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2007) y de la graficación (Cordero, 2011). El propósito de este trabajo es formular una categoría de Modelación-Graficación que proviene de su práctica.

De esta manera, este libro ofrece un *marco de referencia para la modelación escolar anclada en la graficación*. Para la configuración de este marco de referencia se hace un estudio del uso de las gráficas<sup>4</sup> con el primer tratado donde se recurre a una figuración geométrica de las cualidades, interpretada como una modelación con figuras geométricas de una situación de variación. Se trata del *Tractatus* de Oresme, titulado *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*<sup>5</sup> (Oresme, 1968) y que a partir de este momento llamaremos *Tractatus de Oresme*. Su idea central es que las figuras geométricas y el conocimiento sobre las proporciones matemáticas ayudan a “comprender fenómenos” donde intervienen cualidades que pueden adquirir, sucesivamente, diferentes intensidades. Identificamos en esta obra un uso de las gráficas que trae como consecuencia la transformación del funcionamiento y de la forma del conocimiento matemático de la época, la geometría y las proporciones, estableciendo una naturaleza epistemológica determinada por su uso para modelar situaciones de cambio y variación. La transformación mencionada es una explicación de cómo ocurre la resignificación y hace visibles los elementos del marco de referencia. Con esta concepción se establece una relación entre el estudio de fenómenos de cambio y variación con una práctica de modelación. Como resultado de este estudio se aportan: 1) datos epistemológicos propios del conocimiento que dan información sobre el uso del conocimiento matemático referido a

---

<sup>4</sup> Se usa la palabra “gráficas” en un sentido más amplio, que incluye figuras y símbolos.

<sup>5</sup> M. Clagett, *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions, A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, University of Wisconsin Press, Madison, 1968 (con traducción inglesa y comentarios).

las formas geométricas y de proporciones para obtener una funcionalidad en situaciones de variación; 2) una génesis del uso de gráficas para modelar situaciones de variación y cambio, en particular, para modelar el movimiento (M-M); y 3) una articulación de los datos epistemológicos (DE) aportados en el estudio del uso de las gráficas en el *Tractatus* de Oresme con los aspectos distintivos del binomio modelación-graficación que se conciben como una manifestación del uso de las gráficas en la construcción de ideas del Cálculo y el Análisis Matemático (Cordero, 2011).

La articulación de estos resultados conforma una epistemología para la modelación escolar que está anclada en las gráficas, que se llamará la práctica de la modelación-graficación (M-G), y que proporciona un marco de referencia para que los estudiantes resignifiquen la variación a partir de un nuevo uso de las gráficas. Para este estudio, nos centraremos en aquel conocimiento que se encuentra alrededor de la modelación gráfica del cambio y de la variación, como un caso especial se tomará la modelación del movimiento.

Esta práctica de la M-G representa un eje para desarrollar acciones en el sistema didáctico a través el diseño de situaciones de modelación del movimiento. Los elementos constitutivos de la categoría de modelación-graficación se traducen en los elementos de un diseño de situación con una hipótesis específica: *La variación se resignifica a través de la modelación-graficación*. Es decir, una situación de aprendizaje que genera en los estudiantes un interés por estudiar un fenómeno de cambio a través de gráficas de las funciones que ahí intervienen, contribuye a establecer relaciones entre gráficas y situaciones de cambio donde la variación tiene un sentido específico que no depende necesariamente de las propiedades analíticas de la función. De esta manera, se establece un “uso de las gráficas” asociado a la función orgánica de la figuración de las cualidades, donde se establecen formas de uso de las gráficas, se construyen argumentos y se ponen en funcionamiento avanzando hacia justificaciones funcionales.

Con algunos elementos de la ingeniería didáctica se analiza nuestra hipótesis. De esta manera, 1) se cuenta con evidencia de que los elementos de funcionamiento de la figuración de las cualidades surgen en

una SMM al identificar las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad que los participantes logran establecer como *argumentos* para explicar la variación en una situación de cambio, y 2) se cuenta con evidencias de las formas de uso de las gráficas a partir de la caracterización de los *significados* y los *procedimientos* que los participantes ponen en juego al establecer las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad en una situación de cambio en los momentos del diseño de situación: donde establecen la forma, construyen los argumentos y los ponen en funcionamiento.

# CAPÍTULO 1





## Antecedentes

¿Cuál es el estatus de la modelación y de la graficación en la matemática escolar? La modelación es considerada en la escuela como una actividad que le da un sentido de aplicación a los conocimientos adquiridos en los distintos cursos de matemáticas. Es decir, una vez que los estudiantes han estudiado algunos aspectos de cierto conocimiento matemático, por ejemplo, la función cuadrática, se espera que el estudiante los aplique en problemas asociados con un modelo cuadrático, como es el tipo de problemas

de caída libre en condiciones ideales. Por otro lado, la graficación es considerada en la escuela como una habilidad que le permite al estudiante visualizar algunos de los aspectos que se presentan de cierto contenido matemático, siguiendo el ejemplo de la función cuadrática, la curva llamada parábola proporciona una forma visual de representar los puntos que satisfacen la expresión analítica de una ecuación cuadrática, o comprobar que la parábola definida como un lugar geométrico coincide con la curva que representan los puntos de la expresión analítica de una cierta función cuadrática. Hay una desarticulación entre la actividad de modelación y el espacio gráfico de los ambientes tecnológicos. ¿Qué ganancia se tendría al introducir en el sistema

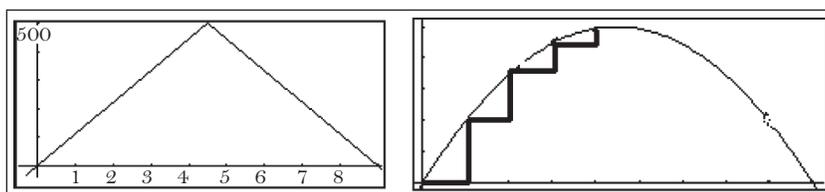
*“La modelación se ha estudiado en su relación con la variedad de representaciones “más accesibles” que puede proporcionar de un fenómeno o de una situación matemática específica, es importante para nuestra investigación ir más allá y concebir a la modelación como una herramienta que transforma el fenómeno estudiado. Cuando se incorpora el uso de la tecnología para la graficación se genera un “espacio gráfico” que ha sido estudiado”.*

escolar una categoría sustentada en un binomio modelación-graficación, que articule, precisamente, la modelación y la graficación, es decir, proporcione una caracterización de actividades donde la modelación escolar esté anclada a la graficación?

Partamos de la descripción de una experiencia. Se han realizado exploraciones con estudiantes que han cursado Álgebra, Geometría, Geometría Analítica y Cálculo (Suárez, 2002), se les pide graficar una situación de movimiento en la que una persona se aleja de un punto de partida y regresa en un tiempo determinado y se pide también describir la variación que se da en tal situación de cambio. A continuación se comenta de qué manera se ponen en uso sus conocimientos para responder a las actividades de modelación ancladas en la graficación.

Se ha observado que se recurre, en primer lugar, y de forma persistente, a líneas rectas y a curvas parecidas a una parábola.

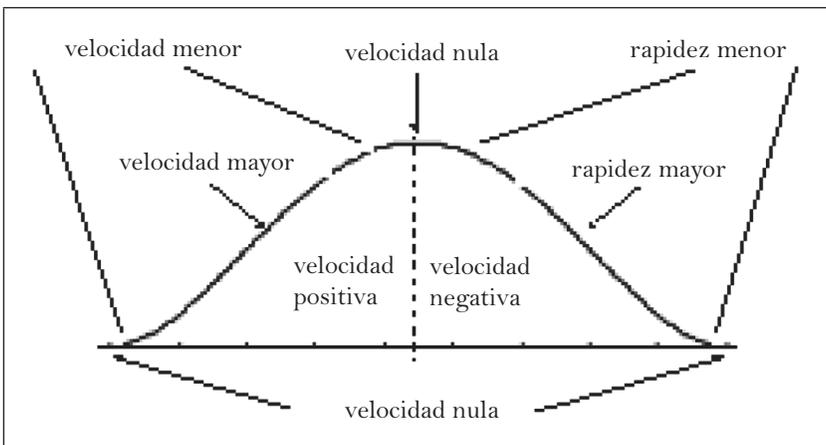
**FIGURA 1. MODELOS: A) LINEAL Y B) CUADRÁTICO PARA EL MOVIMIENTO DE UNA PERSONA EN GRÁFICAS DE POSICIÓN CONTRA TIEMPO**



El modelo lineal (véase figura 1a) permite describir la variación numéricamente a partir de la velocidad constante promedio para cada uno de los intervalos de ida y vuelta. Se asignan valores de signo contrario para designar las velocidades de la ida, por un lado, y de la vuelta, por otro. En el modelo cuadrático se usa una aproximación de velocidades promedio para intervalos de tiempo igual a lo largo de todo el trayecto (véase figura 1b). Algunos estudiantes logran asociar la pendiente de los distintos intervalos con la velocidad en cada uno de ellos, permitiendo el paso de una descripción cuantitativa de la variación a una cualitativa. Estos elementos permiten asociar la inclinación de la curva en un punto dado con la pendiente en un intervalo cada vez más pequeño y, por tanto, con la velocidad en un tiempo dado.

La exploración de la situación de movimiento con gráficas inicia con trazos rectos y, a partir del análisis descrito en el párrafo anterior, posteriormente sigue con los trazos curvos sin aparecer explícitamente ningún procedimiento analítico-algebraico. Cabe mencionar que en el sistema escolar las gráficas de la parábola y otras curvas están asociadas a expresiones algebraicas y sus propiedades. De esta manera, con la línea de razonamiento a partir del procedimiento de obtener velocidades por intervalos y asociar la pendiente con la velocidad, los estudiantes pueden lograr una gráfica del movimiento donde describan los matices de la variación de la velocidad en los distintos intervalos del trayecto (véase figura 2).

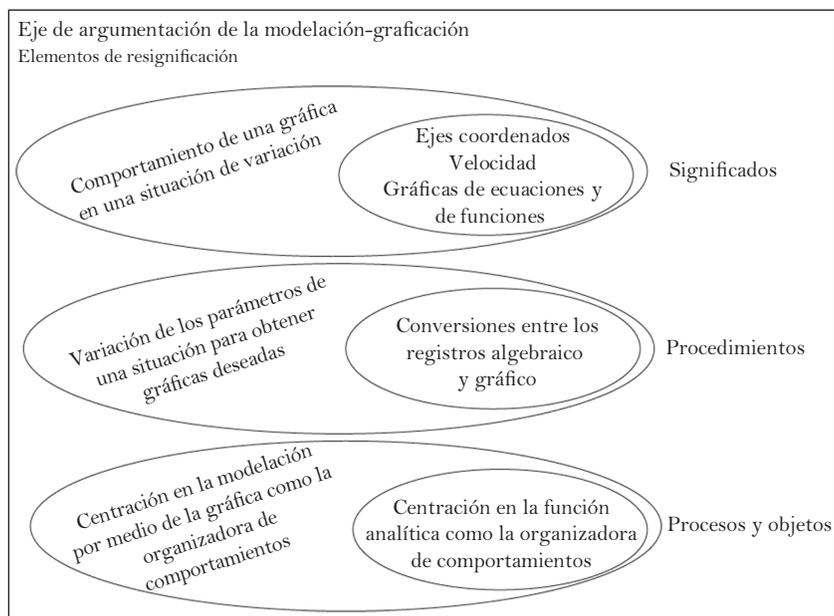
**FIGURA 2. UNA GRÁFICA DE MOVIMIENTO. MATICES EN LA VELOCIDAD**



Este ejemplo nos muestra dos aspectos de nuestra problemática. Por un lado, el conocimiento que un estudiante adquiere en su paso por la escuela se encuentra aislado y no existe una transferencia espontánea que permita que use el conocimiento matemático, que sea funcional. Pero por otro lado, hay una cierta clase de tareas que está intrínsecamente relacionada con el conocimiento mismo y sí permite que el conocimiento se haga funcional. En particular, la tarea propuesta a los estudiantes: modelar una situación de cambio y variación por

medio de una gráfica, proporciona un eje que hace que surja una argumentación gráfica a partir de la necesidad misma de la modelación.

**FIGURA 3. ELEMENTOS DE RESIGNIFICACIÓN  
DE LA MODELACIÓN-GRAFICACIÓN**



Esta clase de tareas, que integra la modelación y la graficación, trastoca los conocimientos matemáticos de los estudiantes. La forma de graficar ecuaciones o funciones y el cálculo de las velocidades se organizan en nuevos significados que surgen del comportamiento que debe seguir una curva cuando está relacionada con una situación de cambio y variación. De los procedimientos que permiten pasar de una expresión algebraica a una curva, por ejemplo, a través del punteo, se avanza a establecer relaciones a partir de la variación de parámetros de una situación de movimiento para obtener gráficas deseadas. Estas relaciones desplazan la centración en la función analítica para darle un estatus a la “situación de cambio y variación” que rige las características de

las gráficas. A esta reorganización la llamamos una resignificación de la variación y tiene como eje a la modelación-graficación.

### *Estado del conocimiento sobre la modelación y la graficación*

En este apartado se plantea el uso de las gráficas como objeto de estudio, esta perspectiva proporciona un planteamiento diferente al estudio de las funciones. Se inicia con un estado del conocimiento sobre lo que se maneja en este proyecto como actividades de modelación gráfica y de simulación gráfica. Esta revisión se completa presentando dos corrientes de investigación de las gráficas, uno que se centra en su naturaleza como representación de una función y otra más en la que se ha intentado caracterizar el uso de las gráficas. Se termina con una discusión sobre las implicaciones de realizar un estudio de uso de las gráficas en la construcción de conocimiento matemático.

### *Estado del conocimiento sobre la modelación y la simulación*

Debido al interés de insertar el binomio modelación-graficación en la escuela integrada en un ambiente tecnológico, en este apartado se da una panorámica del uso de la tecnología en lo que se refiere a la modelación y la simulación.

### *La modelación como objeto de estudio en la matemática educativa*

La tecnología es considerada como parte integral del binomio ciencia y tecnología. Uno de los problemas educativos ha sido su grado de desarrollo. De un tiempo relativamente corto, 25 años, a la fecha, las calculadoras, las computadoras y los procesadores matemáticos

(algebraicos, geométricos, numéricos y gráficos) han pasado de ser herramientas de unos cuantos a tener un uso masivo, ya que su desarrollo ha perfeccionado su técnica y abaratado su costo. El avance acelerado de la tecnología educativa en particular ha dado pie a una serie de fenómenos. Los profesores actuales no han aprendido matemáticas con el uso de la tecnología y hoy deben enseñar de esta forma. El uso de una herramienta tecnológica hace explícito o necesario el manejo de una sintaxis especial como la pantalla que aparece por *defecto* en los graficadores o los comandos necesarios para ejecutar un cálculo algebraico.

El interés por la construcción de modelos matemáticos se ha incrementado en tiempos recientes en todas las áreas de conocimiento, y específicamente en educación desde hace unas décadas, debido a los alcances de las matemáticas en su relación con otras ciencias. La concepción de modelos que se refiere al desarrollo de otras disciplinas corresponde a lo declarado por Aris:

Un modelo matemático es cualquier sistema completo y compatible de ecuaciones<sup>6</sup> matemáticas, diseñadas para que se correspondan con alguna otra entidad, su prototipo. Tal prototipo puede ser una entidad física, biológica, social, psicológica o conceptual, tal vez, incluso, otro modelo matemático (Aris, citado en Davis y Hersh, 1988: 67).

Sin embargo, el desarrollo de modelos se ha visto reflejado en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de forma diferente. Existen grupos de investigación (por ejemplo, la Comunidad Internacional de Profesores de Modelación Matemática y Aplicaciones, ИСТМА, por sus siglas en inglés: *The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications*), que han centrado su interés en avanzar hacia este desarrollo en el campo de la educación matemática. Para la ampliación del rango de cobertura hasta los niveles de educación básica y media, el énfasis de la modelación se ha desplazado hacia la interacción dinámica entre el mundo real y las matemáticas, es decir, al

---

<sup>6</sup> Davis y Hersh señalan en la misma referencia que el término “ecuaciones” puede ser reemplazado por “estructura”, pues no siempre se trabaja con modelos numéricos.