Julián de la Horra Navarro

Catedrático de Estadística
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

MODELOS MATEMÁTICOS PARA CIENCIAS EXPERIMENTALES

Con la solución detallada de todos los ejercicios

DIAZ DE SANTOS

Madrid • Buenos Aires • México • Bogotá

Ediciones Díaz de Santos
Internet: http//www.editdiazdesantos.com
E-mail: ediciones@editdiazdesantos.com

ISBN: 978-84-9052-209-7
Depósito legal: M-28593-2018

Fotocomposición y diseño de cubierta: P55 Servicios Culturales C.B.

Printed in Spain - Impreso en España

ÍNDICE

Agradecimientos....................VII
Prefacio.................... XI

PARTE PRIMERA
Modelos

1. Funciones de una variable....................3
2. Integración....................33
3. Ecuaciones diferenciales....................55
4. Aplicaciones del cálculo matricial....................69
5. Funciones de varias variables.................... 103

PARTE SEGUNDA
Soluciones de los ejercicios

6. Ejercicios-Soluciones. Funciones de una variable.................... 119
7. Ejercicios-Soluciones. Integración.................... 151
8. Ejercicios-Soluciones. Ecuaciones diferenciales.................... 169
9. Ejercicios-Soluciones. Aplicaciones del cálculo matricial.................... 193
10. Ejercicios-Soluciones. Funciones de varias variables.................... 227

PREFACIO

La docencia en una asignatura de Matemáticas para alumnos de algún Grado de las Ciencias Experimentales (Biología, Ambientales, Bioquímica,...) siempre supone un gran reto para cualquier profesional, ya que un curso de Matemáticas dirigido a este tipo de alumnos no debería ser un curso a base de definiciones, teoremas y demostraciones (como los cursos dirigidos a estudiantes del Grado de Matemáticas), pero tampoco debería ser un mero conjunto de recetas y fórmulas.

En mi opinión, un curso de este tipo debe ir enfocado a que los alumnos descubran que los Modelos Matemáticos constituyen una ayuda inestimable, porque facilitan enormemente el análisis sistemático de los estudios experimentales, y porque proporcionan soluciones automáticas y científicas, además de una interpretación sencilla de los resultados obtenidos.

Los diferentes capítulos de este libro corresponden a una selección de algunos de los Modelos Matemáticos más interesantes para las Ciencias Experimentales:

- Funciones de una variable
- Integración
- Ecuaciones diferenciales
- Aplicaciones del cálculo matricial
- Funciones de varias variables

Fuera de esta selección quedan modelos tan interesantes y necesarios para las aplicaciones como son los Modelos de Probabilidad y los Modelos Estadísticos, los cuales tienen entidad suficiente como para merecer libros aparte.

Como se indicaba al principio, el objetivo esencial de este libro es que los alumnos descubran cómo se pueden aplicar diferentes Modelos Matemáticos a los problemas que surgen en las Ciencias Experimentales, y cómo se pueden interpretar los resultados obtenidos. Por este motivo, la solución completa y detallada de todos los ejercicios propuestos en cada capítulo se ofrece al final del libro.

Este libro es el fruto del trabajo desarrollado, durante muchos años, impartiendo docencia en asignaturas de Matemáticas y Estadística en diferentes Grados de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de Madrid, en la que ha sido un placer desempeñar casi toda mi vida profesional.

PARTE PRIMERA

Modelos

1
Funciones de una variable

1.1. Introducción

Una de las primeras necesidades que surgen en las Ciencias Experimentales es la de poder expresar, aproximadamente, los valores de una variable Y en función de los valores de otra variable X. Por ejemplo, podemos estar interesados en expresar:

- El peso de las personas (Y) en función de su estatura (X).
- El peso de las aves de una especie (Y) en función de su envergadura (X).
- El nivel medio de contaminación semanal (Y) en función de las precipitaciones que se han producido (X).
- La altura del oleaje (Y) en función de la velocidad del viento (X).
- El número de ejemplares (N) de una especie en cierto hábitat en función del tiempo (T).
- La concentración de oxígeno en el agua (X) en función del tiempo (T).

La variable Y puede recibir distintos nombres: variable dependiente, variable de interés, variable respuesta,... La variable X también puede recibir diferentes nombres: variable independiente, variable explicativa,...

El modelo matemático que utilizamos para expresar una variable Y en términos de otra variable X es la **función de una variable**. Este modelo, no sólo permite expresar una variable en función de otra, sino que las herramientas asociadas a este modelo (límites, derivadas,...) nos permiten abordar y expresar, de manera sencilla, muchos aspectos interesantes de la relación entre las dos variables.

1.2. Función de una variable

Definición. Una **función de una variable**, $y = f(x)$, es el modelo matemático que nos dice cuál es el valor de la variable Y para cada posible valor de la variable X.

Algunas veces tiene sentido considerar todos los valores de la recta real como posibles valores de X, otras veces tiene sentido considerar para X

solamente los valores positivos, otras veces consideraremos un intervalo, etc. En general, los valores posibles de X reciben el nombre de dominio.

A continuación, vamos a ir repasando todos los conceptos y herramientas habitualmente relacionados con las funciones de una variable (continuidad, derivadas, asíntotas,...) pero poniendo especial énfasis en su utilidad y en su interpretación.

1.3. Discontinuidades

Definición. Una función $y = f(x)$ es **continua** en un punto x_0, cuando:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Lo más importante para nosotros de esta definición es entender el significado intuitivo que puede tener una discontinuidad:

Ejemplo 1. Consideremos la función $N = f(t)$ que expresa el número de ejemplares de una especie en una reserva natural en función del tiempo. Una discontinuidad en un instante t_0 representa una variación brusca en el número de ejemplares. Si la discontinuidad tiene un salto hacia abajo, representa una disminución brusca de la población como consecuencia, por ejemplo, de un desastre natural. Si la discontinuidad presenta un salto hacia arriba, representa un aumento brusco de la población como consecuencia, por ejemplo, de una suelta de ejemplares para repoblar la zona.

En cualquier caso, conviene destacar que la mayoría de las funciones que vamos a utilizar en las Ciencias Experimentales son funciones continuas.

1.4. Derivadas

La derivada de una función es una herramienta enormemente útil para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, sus máximos, mínimos,... Pero, sobre todo, es enormemente útil porque su interpretación juega un papel central en muchos fenómenos experimentales.

Definición. La **derivada** de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ver la Figura 1.1 para la interpretación gráfica de esta definición.

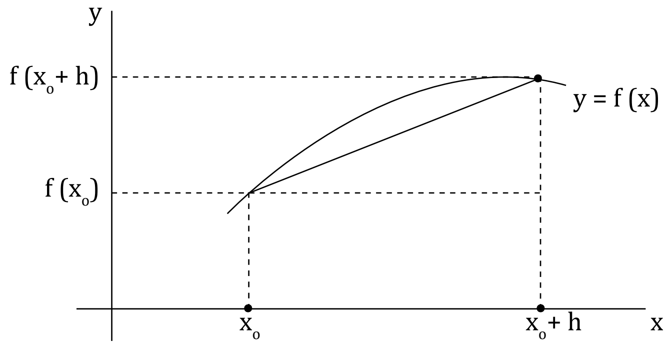

Figura 1.1: Interpretación gráfica de la derivada.

La función derivada se suele representar como $y' = f'(x)$. Por supuesto, podemos considerar también la derivada segunda, $y'' = f''(x)$, y así sucesivamente. En todo lo que viene a continuación supondremos la existencia de derivadas de las funciones que estemos analizando. Dicho de mánera gráfica, supondremos que estas funciones son suficientemente suaves.

A partir de la definición de derivada se van obteniendo una serie de reglas que permiten obtener, de manera sencilla, la derivada de cualquier función. Estas reglas las supondremos previamente conocidas.

Es fundamental tener claro el significado de la derivada de una función. A partir de la definición y de la Figura 1, es fácil darse cuenta de que la derivada de $y = f(x)$ en x_0 proporciona la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto x_0. Expresado en términos más intuitivos:

Significado de la derivada

$y' = f'(x)$ **representa la variación de la variable** Y **por cada unidad que aumenta la variable** X.

Dicho de otra manera:

La derivada $y' = f'(x)$ **representa la velocidad de variación de la variable** Y **con respecto a** X.

Análogamente, la derivada segunda, $y'' = f''(x)$, representaría la velocidad de variación de y', y así sucesivamente.

Ejemplo 1 (continuación). Si la función $N = f(t)$ expresa el número de ejemplares de una especie en una reserva natural en función del tiempo, su derivada, $N' = f'(t)$, representa la variación del tamaño de la población por unidad de tiempo, es decir, la velocidad de variación del número de ejemplares con respecto al tiempo.

1.5. Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos

Una de las aplicaciones esenciales de las derivadas es que son muy útiles para hallar los intervalos donde una función crece o decrece, y para hallar máximos y mínimos relativos de una función.

Los intervalos en los que una función crece o decrece, así como los máximos y mínimos relativos pueden estudiarse con la primera derivada. El razonamiento es muy sencillo, y utiliza el significado de la derivada que se ha dado anteriormente:

Cuando una función, $y = f(x)$, es creciente en un intervalo, su velocidad de variación es positiva, es decir, su derivada primera es positiva. Esto se traduce en una regla muy sencilla:

Regla

Cuando $y' = f'(x) > 0$ en un intervalo, la función es creciente en ese intervalo.

Cuando una función, $y = f(x)$, es decreciente en un intervalo, su velocidad de variación es negativa, es decir, su derivada primera es negativa. Esto se traduce en una regla muy sencilla:

Regla

Cuando $y' = f'(x) < 0$ en un intervalo, la función es decreciente en ese intervalo.

Veamos ahora los máximos y los mínimos relativos:

La función $y = f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto x_0 cuando en ese punto la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Es decir, cuando $y' = f'(x)$ pasa de ser positiva a ser negativa. En resumen, tenemos la siguiente regla:

Regla

La función $y = f(x)$ presenta un máximo relativo en x_0 cuando ocurren las siguientes cosas:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. **Antes de x_0, la derivada primera es positiva**.
3. **Después de x_0, la derivada primera es negativa**.

La función $y = f(x)$ presenta un mínimo relativo en el punto x_0 cuando en ese punto la función pasa de ser decreciente a ser creciente. Es decir, cuando $y' = f'(x)$ pasa de ser negativa a ser positiva. En resumen, tenemos la siguiente regla:

Regla
La función $y = f(x)$ presenta un mínimo relativo en x_0 cuando:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. **Antes de x_0, la derivada primera es negativa**.
3. **Después de x_0, la derivada primera es positiva**.

Muy frecuentemente, se utiliza la derivada segunda, $f''(x_0)$, para determinar si nos encontramos ante un máximo o un mínimo relativo. Pero, como se acaba de indicar, eso es innecesario. Es suficiente con analizar la derivada primera.

El programa de trabajo para deteminar zonas de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos es el siguiente:

1. Calculamos la derivada primera, $y' = f'(x)$.
2. Planteamos y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Las soluciones de esta ecuación serán los potenciales máximos y mínimos relativos (puntos críticos).
3. Determinamos si la derivada es positiva o negativa entre los puntos críticos. Para esto, bastará con evaluar esta derivada en un punto de cada uno de los intervalos obtenidos.
4. Aplicamos las reglas descritas anteriormente.

Veamos todo esto en un ejemplo:

Ejemplo 2. Consideramos la función $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$. Aplicamos los pasos anteriores:

1. Calculamos la derivada primera:
   $y' = f'(x) = x^2 - 4x + 3$
2. Planteamos la ecuación $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow$ Obtenemos las soluciones $x = 1$ y $x = 3$.

3. Por ejemplo, para $x = 0$: $f'(0) = 3 > 0$. Tenemos que $f'(x) > 0$, para $x < 1$.

   Por ejemplo, para $x = 2$: $f'(2) = -1 < 0$. Tenemos que $f'(x) < 0$, para $x \in (1, 3)$.

   Por ejemplo, para $x = 4$: $f'(4) = 3 > 0$. Tenemos que $f'(x) > 0$, para $x > 3$.

4. Tenemos la situación que se puede ver en la Figura 1.2.

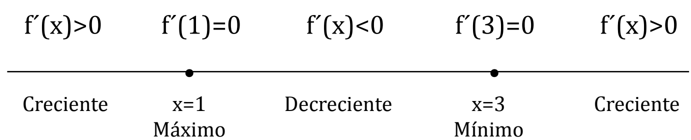

Figura 1.2: Ejemplo 2.

En resumen:
Para $x < 1$, la función es creciente.
Para $x = 1$, la función presenta un máximo relativo.
Para $x \in (1, 3)$, la función es decreciente.
Para $x = 3$, la función presenta un mínimo relativo.
Para $x > 3$, la función es creciente.

1.6. Concavidades y puntos de inflexión

Otra de las aplicaciones fundamentales de las derivadas es su utilización para estudiar el tipo de concavidad y los puntos de inflexión de una función. Para este estudio necesitaremos la segunda derivada.

Las funciones presentan concavidades hacia arriba o concavidades hacia abajo en un intervalo cuando son de la forma indicada en la Figura 1.3.

Observemos, en primer lugar, el caso de la concavidad hacia arriba. Si nos fijamos en la Figura 1.3, observaremos que Y crece cada vez más deprisa, es decir, su velocidad de variación es cada vez mayor, lo cual significa que $y' = f'(x)$ es creciente. Por tanto, su derivada, $y'' = f''(x)$, tiene que ser positiva:

Regla

Cuando $y'' = f''(x) > 0$ en un intervalo, la función presenta una concavidad hacia arriba en ese intervalo.

Observemos, ahora, el caso de la concavidad hacia abajo. Si nos fijamos en la Figura 3, observaremos que Y crece cada vez más despacio, es decir, su velocidad de variación es cada vez menor, lo cual significa que $y' = f'(x)$ es decreciente. Por tanto, su derivada, $y'' = f''(x)$, tiene que ser negativa:

Regla

Cuando $y'' = f''(x) < 0$ en un intervalo, la función presenta una concavidad hacia abajo en ese intervalo.

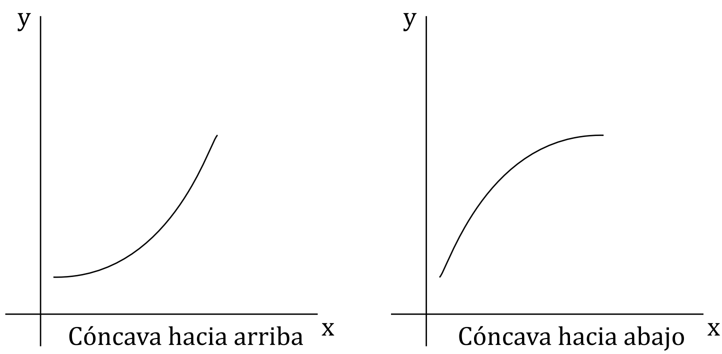

Figura 1.3: Tipos de concavidad.

Un **punto de inflexión** es un punto x_0 en el que se produce un cambio en el tipo de concavidad. Ver Figura 1.4.

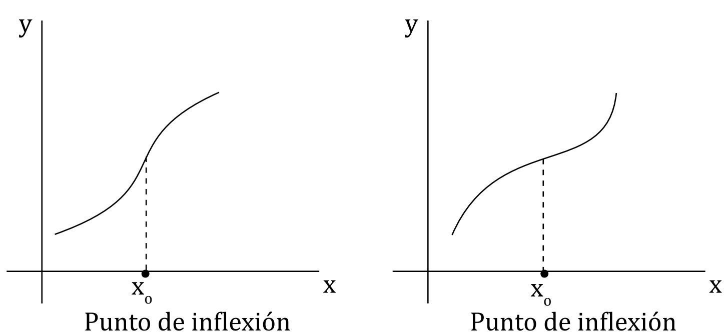

Figura 1.4: Puntos de inflexión.

Al haber un cambio en el tipo de concavidad, la derivada segunda pasa de ser positiva a ser negativa, o al revés. En resumen, tenemos:

Regla

La función presenta un punto de inflexión en x_0 cuando ocurren las siguientes cosas:

1. $f''(x_0) = 0$
2. **La derivada segunda cambia de signo.**

Es muy frecuente evaluar la derivada tercera, $f^{(3}(x_0)$, para determinar si nos encontramos ante un punto de inflexión. Pero, como se acaba de indicar, eso es innecesario. Es suficiente con analizar la derivada segunda.

Una propiedad interesante de los puntos de inflexión es la siguiente:

En un punto de inflexión, la derivada primera pasa de ser creciente a ser decreciente (o al revés). Es decir, en un punto de inflexión, la derivada primera alcanza un máximo (o un mínimo). Pero la derivada primera es la velocidad de variación de Y, así que, por tanto:

Significado de un punto de inflexión

En un punto de inflexión, la velocidad de variación alcanza un máximo (o un mínimo).

El programa de trabajo para deteminar los distintos tipos de concavidad de una función y sus puntos de inflexión es el siguiente:

1. Calculamos la derivada segunda, $y'' = f''(x)$.
2. Planteamos y resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$. Las soluciones de esta ecuación serán los potenciales puntos de inflexión.
3. Determinamos cómo es la derivada segunda (positiva o negativa) entre los potenciales puntos de inflexión. Para esto, bastará con evaluar esta derivada segunda en un punto de cada uno de los intervalos obtenidos.
4. Aplicamos las reglas descritas anteriormente.

Veamos todo esto en un ejemplo:

Ejemplo 2 (continuación). Consideramos la función $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 5$. Aplicamos los pasos anteriores:

1. Calculamos la derivada segunda:

   $y' = f'(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad \Rightarrow \qquad y'' = f''(x) = 2x - 4.$

2. Planteamos la ecuación $f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow$ Obtenemos la solución $x = 2$.

3. Por ejemplo, para $x = 0$: $f''(0) = -4 < 0$. Tenemos que $f''(x) < 0$, para $x < 2$.

   Por ejemplo, para $x = 4$: $f''(4) = 4 > 0$. Tenemos que $f''(x) > 0$, para $x > 2$.

4. Tenemos la situación que se puede ver en la Figura 1.5.

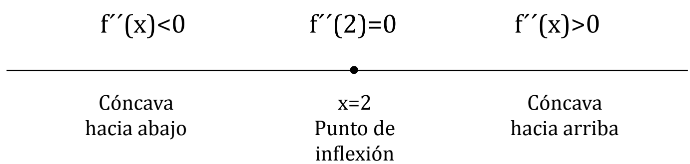

Figura 1.5: Ejemplo 2 (continuación).

En resumen:
Para $x < 2$, la función es cóncava hacia abajo.
Para $x = 2$, la función presenta un punto de inflexión.
Para $x > 2$, la función es cóncava hacia arriba.

1.7. Asíntotas

Las asíntotas con más interés en las aplicaciones son las asíntotas horizontales y las asíntotas oblicuas. Las estudiamos a continuación.

Definición.- La función $y = f(x)$ tiene una **asíntota horizontal (por la derecha)** en la recta $y = y_0$ cuando:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = y_0$$

De manera análoga, podemos hablar de asíntotas horizontales (por la izquierda), cuando $x \to -\infty$.

El significado gráfico de una asíntota horizontal (por la derecha) se puede ver en la Figura 1.6. El significado intuitivo es sencillo:

Significado de una asíntota horizontal (por la derecha)

Si $y = y_0$ es una asíntota horizontal, esto significa que, para valores grandes de X, el valor de Y tiende a estabilizarse en el valor y_0.

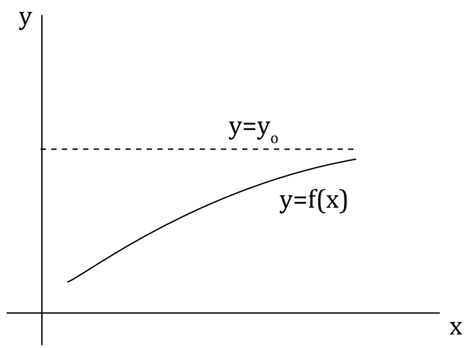

Figura 1.6: Asíntota horizontal.

El procedimiento para encontrar una asíntota horizontal (por la derecha) es sencillo:

1. Calculamos $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

2. Si este límite tiene un valor finito, y_0, la recta $y = y_0$ es asíntota horizontal. En caso contrario, no existe asíntota horizontal.

Definición. La función $y = f(x)$ tiene una **asíntota oblicua** (por la derecha) en la recta $y = mx + b$ cuando:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

De manera análoga, podemos hablar de asíntotas oblicuas (por la izquierda), cuando $x \to -\infty$.

El significado gráfico de una asíntota oblicua se puede ver en la Figura 1.7. El significado intuitivo es sencillo:

<u>**Significado de una asíntota oblicua**</u>

Si $y = mx + b$ es una asíntota oblicua, esto significa que, para valores grandes de X, la velocidad de variación de Y con respecto a X tiende a estabilizarse en el valor m.

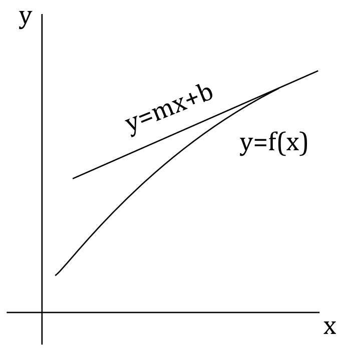

Figura 1.7: Asíntota oblicua.

La interpretación anterior ayuda a diseñar un procedimiento sencillo para encontrar una asíntota oblicua:

1. Calculamos $\lim_{x\to\infty} f'(x)$.

2. Si este límite tiene un valor finito y distinto de cero, m, puede existir una asíntota oblicua cuya pendiente es m. En caso contrario, no existe asíntota oblicua.

3. Finalmente, calculamos $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$. Si este límite tiene un valor finito, b, este sería el término independiente de la asíntota oblicua.

Un procedimiento alternativo (muy habitual, aunque menos intuitivo) para calcular la pendiente, m, de una asíntota oblicua es el siguiente:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Aplicando la regla de l'Hôpital, se ve fácilmente que los dos procedimientos coinciden.